HAL open science

Au delà du principe du maximum pour des systèmes d'opérateurs elliptiques

Marie-Hélène Lécureux

To cite this version:

Marie-Hélène Lécureux. Au delà du principe du maximum pour des systèmes d'opérateurs elliptiques. Mathématiques [math]. Université des Sciences Sociales - Toulouse I, 2008. Français. NNT : . tel-00594884

HAL Id: tel-00594884
https://theses.hal.science/tel-00594884

Submitted on 21 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE TOULOUSE
Université Toulouse 1 ; Institut de Mathématiques

THESE
Pour le doctorat es Mathématiques Appliquées

Sujet de la thèse :
AU-DELA DU PRINCIPE DU MAXIMUM
POUR DES SYSTEMES D'OPERATEURS ELLIPTIQUES

Thèse présentée et soutenue le 13 juin 2008
par
Marie-Hélène LECUREUX-TETU

Sous la direction des

Professeur Bénédicte ALZIARY

Professeur Jacqueline FLECKINGER

RAPPORTEURS

Monique MADAUNE-TORT, Professeur, Université de Pau et des Pays de l'Adour

Peter TAKAC, Professeur, Université de Rostock, Allemagne

MEMBRES du JURY

Bénédicte ALZIARY, Professeur, Université de Toulouse I

Jacqueline FLECKINGER, Professeur, Université de Toulouse I

Jean-Pierre GOSSEZ, Professeur, Université Libre de Bruxelles, Belgique

François de THELIN, Professeur, Université de Toulouse III

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Madame Jacqueline Fleckinger, sans qui je n'aurais jamais commencé ce travail, et qui m'a toujours encouragée.

Merci aussi à Madame Bénédicte Alziary et à Monsieur François de Thélin pour leur présence chaleureuse, donnant toujours confiance dans les moments difficiles.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur Jesus Hernandez qui s'est intéressé dès le début à cette thèse, et qui m'a conseillée régulièrement.

Madame Monique Madaune-Tort et Monsieur Peter Tak ?c ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Je les remercie vivement de l'honneur qui m'est ainsi fait.

Merci à tous les membres du jury, Monsieur Jean-Pierre Gossez, Madame Bénédicte Alziary, Madame Jacqueline Fleckinger, Monsieur François de Thélin qui m'ont fait l'honneur d'examiner ce travail.

Merci à tous les membres de Ceremath pour leur soutien et leur présence amicale.

Je tiens à remercier mon mari et mes enfants qui ont supporté patiemment de me voir travailler sur la thèse pendant les heures de loisir, et merci à toute ma famille pour les encouragements continuels.

Ce travail est dédié à mon neveu Matthieu Klingler qu aurait eu quatorze ans ce 13 juin 2008, si la maladie ne l'avait pas emporté avant.

Table des matières

Chapitre 1

Présentation générale des systèmes étudiés

1.1 Le problème du signe des solutions.

Lorsque Ω est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$, L un opérateur différentiel elliptique du second ordre et f un élément positif de $L^2(\Omega)$, le signe de la solution u, du problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} Lu = \lambda u + f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

est un résultat classique. Ce résultat dépend de la comparaison du paramètre λ à la valeur principale λ_1.

Lorsque $\lambda < \lambda_1$, la solution u est positive (principe du maximum). Les livres de Gilbarg-Trudinger [GT], Protter-Weinberger [PW] donnent les résultats classiques, pour les solutions fortes et faibles.
Dans le cas des équations à poids positif,

$$\begin{cases} Lu = \lambda m u + f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

toujours dans le cas d'un domaine borné régulier, le principe du maximum reste valable (voir par exemple Hess et Kato [HK]). Ce résultat s'étend à des poids qui changent de signe quand $0 < \lambda < \lambda_1$.

Lorsque $\lambda > \lambda_1$, Clément et Pelletier [CP] ont montré, toujours sous l'hypothèse Ω borné régulier, le principe d'anti-maximum : il existe un réel $\delta > 0$, dépendant de f tel que si $\lambda \in (\lambda_1; \lambda_1 + \delta)$ alors la solution u est négative.

De nombreuses adaptations de ces résultats existent pour des systèmes de la forme

$$(S) \qquad \mathcal{L}U = \Lambda MU + HU + F \text{ sur } \Omega,$$

où $\mathcal{L}$ est une matrice diagonale d'opérateurs elliptiques L_k, $1 \leq k \leq n$, H et M sont des matrices de fonctions données et U est un vecteur de fonctions s'annulant à la frontière de Ω, (voir par exemple Hess [H] , Cantrell Cosner [CC], Cosner Schaefer [CS]).

Ce travail est consacré à l'étude de quelques systèmes de la forme précédente, définis sur des ouverts soit non réguliers, soit non bornés.

Dans la première partie, on s'intéresse à des domaines Ω qui sont bornés, mais non réguliers. La condition au bord, appelée «condition de Dirichlet raffinée» est introduite dans Strook et Varadhan [SV] et étudiée dans [BNV] ; c'est une condition limite adaptée aux irrégularités de l'ouvert : on demande à la solution u de ne s'annuler qu'en des points particuliers de la frontière. Perdant ainsi le «contrôle» de la solution, Berestycki, Nirenberg, et Varadhan [BNV] montrent qu'on n'obtient pas de principe du maximum pour toutes les solutions, mais seulement pour les solutions bornées. L'espace naturel de recherche pour les solutions devient alors $W^{2,N}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Pour ces conditions limites de Dirichlet raffinées, le principe du maximum (et celui de l'anti-maximum) ont été étudiés par Birindelli [Bi]. Enfin des principes du maximum ont été établis par [BMS] pour des systèmes de la forme (S), avec certaines matrices H non nulles.

Dans ce travail, en utilisant un théorème de Krein-Rutman adapté à des ensembles de cône positif d'intérieur vide, on étend certains de leurs résultats à des systèmes de la forme :

$$\mathcal{L}U = \Lambda MU + F \text{ sur } \Omega$$

où U est un vecteur dont les composantes sont des fonctions appartenant à $W^{2,N}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, et vérifiant la condition de Dirichlet raffinée.

Dans la seconde partie, le domaine est $\mathbb{R}^N$ tout entier. L'opérateur est un opérateur de Schrödinger de la forme

$$L_q = -\Delta + q \bullet,$$

où q est un potentiel positif, radial, ou une petite perturbation d'un potentiel radial, tendant vers $+\infty$ à l'infini. Il est classique qu'un tel opérateur possède une "valeur propre principale" λ_1 associée à l'état fondamental φ_1. Pour une équation de la forme

$$(E_q) \qquad L_q u = \lambda u + f \text{ sur } \mathbb{R}^N,$$

avec f positif, élément de $L^2(\mathbb{R}^N)$, le "principe du maximum" (fort) est aussi classique pour $\lambda < \lambda_1$; dans [RS], c'est " l'amélioration de la positivité".

Une différence importante avec les domaines bornés est la comparaison à l'état fondamental. Dans le cas borné, le signe des solutions est donné directement par comparaison à l'état fondamental φ_1.

Pour l'équation (E_q) avec f dans l'ensemble :

$$X = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^N) : \frac{f}{\varphi_1} \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \right\},$$

des résultats plus fins de la forme $u \geq c\varphi_1$ ("positivité fondamentale") ou $u < -c\varphi_1$ ("négativité fondamentale") sont démontrés par Alziary, Takáč [AT1], [AT2] ou Alziary, Fleckinger, Takáč [AFT1], [AFT2]. En effet, si pour un ouvert borné ce type de résultats découle immédiatement du principe du maximum de Hopf, il n'en va pas de même quand l'ouvert est $\mathbb{R}^N$.

Plusieurs des résultats mentionnés ci-dessus sont adaptés à des systèmes par Cardoulis [C], Besbas [Be], Alziary Fleckinger Takáč [AFT3]. On en établit de nouveaux ici valables en particulier pour des systèmes non nécessairement coopératifs. On obtient des résultats de "positivité fondamentale" ou "négativité fondamentale" pour certains sytèmes de la forme (S) avec $L_k = L_{q_k}$, plus précisément pour les systèmes

$$(SSch) \qquad \left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u_1 + q_1(x) u_1 &=& \lambda u_1 + a\, u_1 + b\, u_2 + f(x) & \text{in } L^2(\mathbb{R}^N) \\ -\Delta u_2 + q_2(x) u_2 &=& \lambda u_2 + c\, u_1 + d\, u_2 + g(x) & \text{in } L^2(\mathbb{R}^N) \end{array} \right.$$

Dans un premier temps a, b c et d sont des réels de signes quelconques. Dans un second temps, on donne des résultats pour a, b c et d fonctions bornées. La comparaison des solutions à l'état fondamental pour un tel système 2×2 est obtenue par une technique de découplage, et s'inspire du papier de Cosner, Schaefer [CS] pour des domaines réguliers bornés.

Le plan de ce travail est le suivant :

Dans la première partie on rappelle la définition de la "condition de Dirichlet raffinée" et les résulats de [BNV] et [Bi] sur l'existence d'une "valeur propre principale" et le principe du maximum pour une équation à poids positif. On donne ensuite un principe du maximum pour une équation à poids qui change de signe en utilisant l'existence d'une valeur propre principale positive faite dans [FHT].

Enfin on donne nos résultats pour les sytèmes : on donne des conditions sur la matrice M permettant de s'assurer de l'existence et de l'unicité de la valeur principale, puis on s'intéresse au signe des composantes du vecteur U.

On démontre ces résultats dans le chapitre suivant.

Dans la deuxième partie on rappelle d'abord les résultats classiques pour une équation de Schrödinger à potentiel positif tendant vers $+\infty$ ainsi que certains résultats de "positivité fondamentale" ou "négativité fondamentale" de [AT1], [AFT1], [AT2] valables pour des potentiels à croissance suffisamment rapide (superquadratique). Ces résultats sont utiles pour aborder les systèmes sur l'espace tout entier. On donne ensuite nos résultats

Dans le chapitre suivant, on fait l'état des lieux : on donne des résultats proches déjà connus sur les systèmes, résultats moins complets que ceux qu'on a pu obtenir ici. Enfin, dans le dernier chapitre, on donne les démonstrations des nouveaux résultats.

1.2 Notations et définitions

On précise ici quelques définitions et notations utilisées dans ce travail.

1.2.1 Positivité d'un vecteur

Module : Pour un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_N)$ de $\mathbb{R}^N$, le module est $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$

Positivité d'un vecteur de fonctions Soit un vecteur U de fonctions u_i définies sur un ensemble Ω, à valeurs réelles.

- On dit que U est positif, noté $U \geq 0$, si on a pour chaque composante : $\forall x \in \Omega \; u_i(x) \geq 0$
- On dit que U est strictement positif, noté $U > 0$, si $\forall x \in \Omega$ on a $u_i(x) > 0$

1.2.2 Forte positivité d'un opérateur

Les définitions utilisées ici sont celles de Daners-Koch-Médina [DKM]

Définition 1 *Quasi-intérieur Soit un treillis de Banach E, de dual E^*. On dit que x est un point quasi-intérieur du cône positif de E si pour tout $x^* \in E^*$, $, x^* \geq 0, x^* \neq 0$ on a le produit de dualité $\langle x^*, x\rangle > 0$*

Le quasi-intérieur de $L^N(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions strictement positives presque partout.

Définition 2 *Soit un treillis de Banach E On appelle opérateur fortement positif un opérateur linéaire borné T tel que si $x \geq 0$, $x \neq 0$, alors Tx est un point quasi-intérieur.*

Définition 3 *Soit T un opérateur linéaire borné de rayon spectral $r(T)$. On dit qu'un opérateur est irréductible si il existe $\lambda > r(T)$ tel que $(\lambda I - T)^{-1}$ est fortement positif.*

Exemple Si T est fortement positif, ou si une puissance de T est fortement positive, alors T est irréductible, car on a pour tout $\lambda > r(T)$:

$$(\lambda I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-(k+1)} T^k$$

1.2.3 Définitions concernant les matrices

Matrice pleinement couplée
Soit $M = (m_{i,j})_{1 \le i \le n; 1 \le j \le m}$ une matrice dont les composantes $m_{i,j}$ sont des fonctions de $L^\infty(\Omega)$. On dit que M est pleinement couplée lorsque la matrice $\widetilde{M}$ des normes : $\widetilde{M} = \left(\|m_{i,j}\|_\infty\right)_{1 \le i \le n; 1 \le j \le m}$ est telle que $Id_{nm} + \widetilde{M}$ est irréductible.
La matrice des restrictions des composantes $m_{i,j}$ à un sous ensemble de Ω peut ne pas être pleinement couplée.

$M-$matrice non singulière Soit $M = (m_{i,j})_{1 \le i \le n; 1 \le j \le n}$, une matrice dont les composantes $m_{i,j}$ sont des réels. On dit que M est une $M-$matrice non singulière si M est de la forme $M = \lambda I - B$ où $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$, B est une matrice positive telle que $\lambda > \rho(B)$ où $\rho(B)$ est le rayon spectral de B.

Première partie

Systèmes elliptiques sur un ouvert borné non régulier

Chapitre 2

La condition de Dirichlet raffinée

2.1 Introduction

On s'intéresse dans cette partie à des problèmes aux limites de la forme

$$\mathcal{L}U = \Lambda MU + F$$

définis sur un ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^N$, à bord non nécessairement régulier.

La condition au bord considérée, compte-tenu de l'irrégularité du bord de l'ouvert, est la condition de Dirichlet raffinée.
Elle a été introduite par Strook et Varadhan en 1972, [SV], puis utilisée par Berestycki, Nirenberg, Varadhan [BNV], Birindelli [Bi] et Birindelli, Mitidieri, Sweers [BMS]. Elle est définie au paragraphe 2.2.2

Ici, $\mathcal{L}$ est une matrice diagonale d'opérateurs elliptiques L_i définis dans le paragraphe suivant.
M est une matrice de fonctions mesurables, bornées, positives sur Ω, F est un vecteur de fonctions apppartenant à $L^N(\Omega)$ et Λ est un paramètre réel.

Cette partie est organisée de la façon suivante : on rappelle d'abord le cas d'une équation, en précisant quelques résultats nouveaux. Ensuite, on donne des résultats concernant des systèmes. Le chapitre 3 contient les démonstrations. Pour être plus complet, certains résultats sont donnés en annexe.

2.2 Cas d'une équation

2.2.1 L'opérateur étudié

Soit Ω un domaine borné, sans condition de régularité, de $\mathbb{R}^N$.
On considère l'opérateur L défini pour $u \in W^{2,N}_{loc}(\Omega)$ par

$$Lu = -\sum_{j,k=1}^{N} a_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} a_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0(x)u. \tag{1}$$

On fait sur L les hypothèses suivantes :

Hypothèses (H_L) **:**
L'opérateur L est uniformément elliptique à coefficients bornés, c'est à dire qu'il existe des constantes strictement positives b, c_0 et C_0 vérifiant :

$$\left(\sum a_j^2\right)^{1/2} \leq b \ ; \qquad |a_0| \leq b \ ; \tag{2}$$

$$c_0 |\xi|^2 \ \leq \sum_{j,k} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \leq C_0 |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N (\text{ en particulier } a_{jk} \geq 0); \tag{2'}$$

de plus

$$a_{jk} \in C(\Omega), \quad a_j \in L^\infty(\Omega), \quad a_0 \in L^\infty(\Omega). \tag{3}$$

Nous notons L^+ l'opérateur défini par :

$$L^+u = Lu - a_0 u = -\sum_{j,k=1}^{N} a_{jk}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} a_j \frac{\partial u}{\partial x_j}. \tag{4}$$

2.2.2 Condition au bord de Dirichlet «raffinée»

La condition de Dirichlet «raffinée» est une condition au bord adaptée aux domaines irréguliers. Elle a été introduite par Strook et Varadhan [SV]. On utilise ici les définitions et des résultats de Berestycki, Nirenberg, Varadhan, [BNV] et Birindelli [Bi]. On expose plusieurs de leurs principaux résultats en annexe.

Sur un domaine irrégulier, il n'est pas facile de s'assurer que le problème $Lu = f$ sur Ω admette des solutions qui s'annullent en tout point de la frontière $\partial\Omega$. Nous cherchons des solutions qui ne s'annullent qu'en des points bien choisis de la frontière, les points «à barrière forte» définis ci-dessous :

Définition 4 *Le point y de $\partial\Omega$ admet* ***une barrière forte*** *si pour une certaine boule $B_r(y) = \{|x-y| < r\}$ il existe dans $B_r(y) \cap \Omega = U$ une fonction strictement positive $h \in W^{2,n}_{loc}(U)$ satisfaisant $L^+h \geq 1$ et pouvant être prolongée par continuité au point y par $h(y)$ =0.*

Remarque : K. Miller [M] a montré que la condition de cône extérieure en y est suffisante pour que ce point y admette une barrière forte. ([BNV]p 63)
Notation Etant données $u \in W^{2,N}_{loc}(\Omega)$ et une suite de points x_j de Ω convergeant vers $x \in \partial\Omega$, «$x_j \xrightarrow{u} \partial\Omega$» signifie que $u(x_j) \to 0$.

Au couple (Ω, L^+) on associe une fonction u_0 définie de la façon suivante :

Théorème 1 *(Construction de u_0) : il existe u_0 satisfaisant $L^+u_0 = 1$ sur Ω et pouvant être prolongée par 0 en tout point de $\partial\Omega$ admettant une barrière forte. La fonction u_0 est strictement positive. Elle est bornée par une constante dépendant du diamètre de Ω*

Démonstration : H. Berestycki, L.Niremberg et S.R.S. Varadhan, dans [BNV](p. 61 à 64), démontrent ce théorème de la façon suivante : On considère une suite croissante d'ouverts réguliers $\Omega_j \subset \Omega_{j+1}$ et $\bigcup_j \Omega_j = \Omega$.
Sur chaque ouvert Ω_j, soit u_j solution de :

$$\begin{cases} L^+u_j = 1 & \text{sur } \Omega_j \\ u_j = 0 & \text{sur } \partial\Omega_j \end{cases}$$

Cette suite, bornée, croissante, converge vers une fonction u_0 qui s'annule en les points du bord admettant une barrière forte (mais ne s'annulant pas nécessairement sur tout le bord). La fonction u_0 est indépendante du choix de la suite d'ouverts.

Remarque : Si K est un compact de Ω, la suite converge faiblement dans $W^{2,p}(K)$, et fortement dans $C^1(K)$

Définition 5 *([BNV]p 54) On dit que u vérifie la «**la condition de Dirichlet raffinée**» si $x_j \xrightarrow{u_0} \partial\Omega$ implique $u(x_j) \to 0$. On note $u \stackrel{u_0}{=} 0$*

En d'autres termes «u se comporte comme u_0 au bord» : si $x \in \partial\Omega$ avec $u_0(x) = 0$, alors, pour toute suite $x_j \to x$, ona $u(x_j) \to 0$

Exemple : Soit Ω la boule unité dans $\mathbb{R}^3$ privée de l'origine. On l'approche par la suite d'ouverts :

$$C_j = \left\{ x \in \mathbb{R}^3, \frac{1}{j} < |x| < 1 \right\}, \ j \in \mathbb{N}^*.$$

Soit $L = L^+ = -\Delta$
Sur chaque C_j, la fonction u_j vérifie

$$-\frac{\partial^2 u_j}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial u_j}{\partial r} = 1.$$

La fonction $u_0 = \lim_{j \to +\infty} u_j$ est la fonction $u_0(x) = \frac{1}{6}\left(1 - |x|^2\right)$. La propriété $u \overset{u_0}{=} 0$ sur $\partial\Omega$ signifie que u s'annulle sur la sphère unité ; on ne se préoccupe pas de la valeur de u à l'origine.(d'après l'exemple de la page 54[BNV])

2.2.3 Notion de valeur propre pour les problèmes à poids positifs

On donne ici quelques définitions et résultats concernant des équations avec poids m. Ce poids vérifie l'hypothèse :

Hypothèse (H_m) **:** le poids m est une fonction appartenant à $L^\infty(\Omega)$; de plus il existe des constantes positives α et β telles que $0 < \alpha \leq m \leq \beta$ sur Ω.

Dans toutes la suite de ce chapitre, sauf mention expresse du contraire, l'opérateur L est défini sur Ω avec les conditions au bord de Dirichlet raffinées.

Définition 6 *Nous disons que ϕ est une "fonction propre" de L , associée au poids m, positif, de valeur propre λ , (éventuellement complexe) si ϕ est non identiquement nulle, ϕ* ***est bornée*** *et*

$$(Vp) \qquad \begin{cases} L\phi = \lambda m \phi \text{ sur } \Omega \\ \phi \overset{u_0}{=} 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Remarque : L'hypothèse «ϕ est bornée» qui intervient dans la définition est liée au principe du maximum raffiné, exposé au paragraphe 2.2.4.

Nous adaptons ici au cas d'un poids m borné par des constantes positives sur Ω, la notion de valeur principale, introduite dans le cas $m \equiv 1$, par Berestycki, et al, (p3)

Définition 7 *Soit m une fonction vérifiant l'hypothèse (H_m). On définit le réel $\lambda_1(m)$, appelé valeur principale de L associé au poids m par :*

$$\lambda_1(m) = \sup\left\{\lambda \in \mathbb{R} / \, \exists \phi > 0 \,\text{sur}\, \Omega,\, t.q.\, \lambda m \phi \leq L\phi\right\}.$$

La valeur principale est aussi valeur propre :

Proposition 1 *Soit m une fonction vérifiant l'hypothèse (H_m). Alors*
(i) il existe une fonction $\phi_1 > 0$ dans $W^{2,p}_{loc}(\Omega)$, $\forall p < \infty$, appelée fonction principale et vérifiant $L\phi_1 = \lambda_1(m)m\phi_1$.
(ii) si on normalise ϕ_1 par $\phi_1(x_0) = 1$ en un point fixé $x_0 \in \Omega$, alors $\phi_1 \leq k$ sur Ω, où k est une constante dépendant de x_0, Ω, c_0, C_0, b et m.
(iii) $\exists c > 0$ tel que $\phi_1 \leq cu_0$.

Le dernier point de la proposition assure que la fonction ϕ_1 vérifie la condition de Dirichlet raffinée ; cette fonction ϕ_1 est bien une fonction propre : elle vérifie (V_p) et $\lambda_1(m)$ est une valeur propre.
Pour le cas $m \equiv 1$ les deux articles [BNV] et [Bi] montrent, de deux façons différentes, que la valeur principale est aussi valeur propre. Comme il est remarqué dans [BNV], la proposition 1 s'obtient directement à partir du théorème montrant, pour le cas $m \equiv 1$, que la valeur principale de L est aussi valeur propre. La démonstration complète est au chapitre suivant.

Notation : on note λ^* la valeur principale pour le poids $m \equiv 1$ et ϕ^* la fonction propre associée.

2.2.4 Principe du Maximum Raffiné pour une équation

Définition 8 *On dit que L satisfait* ***"le principe du maximum raffiné"*** *sur Ω si :*
- *$Lw \geq 0$ sur Ω, w minorée*
- *$\liminf w(x_j) \geq 0$ pour toute suite (x_j) convergeant vers un point de la frontière annulant u_0*

implique $w \geq 0$ [BNV] p54

On en déduit, pour les opérateurs satisfaisant le principe du maximum raffiné, le corollaire suivant :

Corollaire 1 *Si L satisfait le principe du maximum raffiné, si $Lw \geq 0$ sur Ω, w minorée, et si $w \overset{u_0}{=} 0$, alors $w \geq 0$.*

Remarque : ([BNV] remarque 1.1 p 54) L'hypothèse w minorée dans ce principe est la différence fondamentale de fonctionnement de la condition de Dirichlet «raffinée» avec la condition de Dirichlet usuelle.
Si Ω est la boule ouverte unité dans $\mathbb{R}^3$ privée de l'origine et L l'opérateur -Δ. La fonction u_0 est définie par $u_0(x) = \frac{1}{6}(1 - |x|^2)$. Vérifier la condition de Dirichlet raffinée pour une fonction u signifie ici que $u(x) = 0$ pour tout x tel que $|x| = 1$. Soit la fonction définie par $w(x) = 1 - |x|^{-1}$. Cette fonction s'annule bien en tout point x tel que $|x| = 1$. On a $\Delta w = 0$. Cette fonction n'est pas minorée sur Ω.

Il est clair que $w(x)$ n'est pas positif sur Ω. Il faut éviter cette situation, où w "s'échappe" par l'origine.

On retrouve pour la condition de Dirichlet «raffinée» des résultats bien connus pour la condition de Dirichlet classique : le principe du maximum «raffiné» est vérifié lorsque la valeur principale λ^* est strictement positive. Cela est vrai en particulier si $a_0 \geq 0$. Ces résultats sont donnés en annexe : voir théorème 12 et corollaire 5

Principe du maximum raffiné fort pour une équation

Pour travailler sur les systèmes, il est nécessaire d'établir des résultats concernant les équations éventuellement à poids. Les deux propositions suivantes sont démontrées dans ce but.

La première proposition (dans laquelle le poids n'intervient pas) est presque donnée au cours d'une démonstration de [Bi]. Néanmoins elle n'est pas exprimée en tant que telle.

Proposition 2 ***Principe du maximum raffiné fort***
On considère l'opérateur L vérifiant (H_L), défini sur Ω avec condition de Dirichlet au bord raffinée. On suppose que $\lambda^* > 0$.
Si u, minorée, vérifiant la condition de Dirichlet «raffinée», est telle que $Lu \geq 0$, et $Lu \not\equiv 0$, alors $u > 0$ sur Ω.
On dit alors que L vérifie le «principe du maximum raffiné fort».

La proposition suivante permet de connaître le signe d'un élément u de $W^{2,N}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ lorsque u est solution de

$$(S1) \qquad \begin{cases} Lu = \lambda m u + f \\ u \overset{u_0}{=} 0 \end{cases}$$

où m représente un poids positif, et f une fonction positive non identiquement nulle.

Proposition 3 ***Signe de*** $L - \lambda m$ ***:*** *λ est un réel et m une fonction de $L^\infty(\Omega)$ bornée par des constantes strictement positives. On considère (1) avec $u \in W^{2,N}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$*
• *Si $\lambda < \lambda_1(m)$, alors l'opérateur $L - \lambda m$ vérifie le principe du maximum fort raffiné*
• *Si $\lambda \geq \lambda_1(m)$ alors pour toute fonction $u \geq 0$, on a : $Lu - \lambda m u \geq 0$ sur Ω si et seulement si $\lambda = \lambda_1(m)$ et $u = k\phi_1$ où k est une constante réelle.*

Remarque : Le dernier point montre que la valeur propre principale est algébriquement simple.

Conséquence Soit f dans $L^N(\Omega)$, positive, non identiquement nulle, et u solution bornée de

$$(S1) \qquad \begin{cases} Lu = \lambda mu + f \\ u \overset{u_0}{=} 0 \end{cases}$$

- Si $\lambda < \lambda_1(m)$ alors $u > 0$ (amélioration de la positivité)
- Si $\lambda > \lambda_1(m)$ alors il n'y a pas de solution $u \geq 0$.

2.2.5 Problèmes à poids indéfini

On combine dans ce paragraphe nos résultats avec ceux de Fleckinger, Hernandez, de Thélin [FHT] pour obtenir un principe du maximum fort raffiné pour une équation à poids indéfini.
L'opérateur L est défini comme précédemment, sur Ω avec la condition de Dirichlet raffiné. On suppose
Hypothèse (H'_L) **: positivité** $a_0 \geq 0$.
Le poids g vérifie maintenant l'hypothèse :
Hypothèse (H'_g) **:** le poids g est une fonction mesurable, bornée, et l'ensemble $\Omega^+ = \{x \in \Omega, g(x) > 0\}$ est de mesure non nulle.

Fleckinger, Hernandez, de Thélin ([FHT]théorème 3.2) ont montré l'existence d'une valeur principale strictement positive.
Soit $\lambda_1(L, g, \Omega) > 0$ cette valeur principale et $\phi_1(g)$ la fonction propre positive associée.

Proposition 4 *λ est un réel et g une fonction vérifiant (H'_g) . Soit f dans $L^N(\Omega)$, $f \geq 0$ et $f \not\equiv 0$. On considère u solution de*

$$(S2) \qquad \begin{cases} Lu = \lambda gu + f \\ u \overset{u_0}{=} 0 \end{cases}$$

avec $u \in W^{2,N}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$
• Si $0 \leq \lambda < \lambda_1(L, g, \Omega)$, alors $u > 0$
• Si $\lambda \geq \lambda_1(L, g, \Omega)$ alors pour toute fonction $u \geq 0$, on a : $Lu - \lambda gu \geq 0$ sur Ω si et seulement si $\lambda = \lambda_1(L, g, \Omega)$ et $u = k\phi_1(g)$ où k est une constante réelle.

Remarque : On a $\lambda g = -\lambda(-g)$, c'est pourquoi on se limite dans ce cas à $\lambda \geq 0$

2.3 Systèmes

2.3.1 Notations

Considérons un nombre fini d'opérateurs L_i, $1 \leq i \leq p$; ces opérateurs étant de la même forme que l'opérateur étudié au premier chapitre :

$$(6) \qquad L_i u = -\sum_{j,k=1}^{N} a_{jk}^i \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} a_j^i \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0^i u,$$

Ils s'appliquent aux éléments de $W_{loc}^{2,N}(\Omega)$. On suppose vérifiées les hypothèses suivantes :
Hypothèse (H_i) : Chaque opérateur L_i $1 < i < N$ vérifie (H_L) c'est à dire qu'il est uniformément elliptique, à coefficients bornés et que $a_{jk}^i \in C(\Omega)$.
Hypothèse (H_i') : (hypothèse de positivité) : Les coefficients a_0^i sont positifs ou nuls.

On note $\mathcal{L}$ la matrice diagonale, de coefficients diagonaux L_i. Pour chaque opérateur L_i, on considère la fonction u_0^i intervenant pour définir la condition de Dirichlet raffinée sur Ω. On note U_0 le vecteur $(u_0^i)_{1\leq i\leq p}$

Définition 9 *Soit un vecteur U d'éléments de $W_{loc}^{2,N}(\Omega)$. Il vérifie la condition de Dirichlet raffinée si chacune de ses composantes u_i est telle que $u_i \overset{u_0^i}{=} 0$ sur $\partial\Omega$ Nous notons alors $U \overset{U_0}{=} 0$ sur $\partial\Omega$.*

2.3.2 Principaux résultats sur les systèmes

Nous étudions d'abord un problème de valeur propre pour des systèmes elliptiques, avec condition de Dirichlet raffinée, de la forme

$$(SvP) \qquad \begin{cases} \mathcal{L}U = \Lambda M U & \text{sur } \Omega \\ U \overset{U_0}{=} 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $\mathcal{L} = Diag(L_i)_{1\leq i\leq p}$ vérifiant les hypothèses (H_i) et (H_i'), Λ étant un paramètre réel.

La matrice $M = (m_{i,j}(x))_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq p}$ sera toujours supposée coopérative : $m_{i,j} \geq 0$ lorsque $i \neq j$. Suivant les énoncés la matrice M vérifie des hypothèses parmi les

suivantes :
Hypothèse (H_M) (coefficients bornés) Les fonctions $m_{i,j}$ sont dans $L^\infty(\Omega)$.
Hypothèse (H'_M) La matrice M est pleinement couplée, ce qui signifie que la matrice $\widetilde{M}+I$ est irréductible, où $\widetilde{M}$ est la matrice définie par les composantes $\widetilde{m}_{i,j}=\|m_{i,j}\|_\infty$
Hypothèse (H''_{M1})(forte positivité des termes diagonaux) Pour chaque terme diagonal m_{ii}, il existe des réels α_i et β_i tels que $0<\alpha_i\leq m_{ii}<\beta_i$
Hypothèse (H''_{M2})(stricte positivité des termes diagonaux) On a $m_{i,i}(x)>0$ sur $\overline{\Omega}$

Nous utilisons dans la démonstration du théorème 4 des résultats de Birindelli, Mitidieri, Sweers [BMS]. Ils ont étudiés des systèmes de la forme :

$$\begin{cases} (\mathcal{L}-H)U=\Lambda MU & \text{sur } \Omega \\ U\overset{U_0}{=}0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $\mathcal{L}=Diag(L_i)_{1\leq i\leq p}$; $H=(h_{i,j}(x))_{1\leq i\leq p,1\leq j\leq p}$ et $M=(m_{i,j}(x))_{1\leq i\leq p,1\leq j\leq p}$ sont deux matrices à coefficients dans $C(\overline{\Omega})$.
Les résultats de Birindelli, Mitidieri, Sweers [BMS], supposent l'existence d'une sursolution forte, ainsi que le couplage de la matrice H, mais ils admettent des coefficients diagonaux $m_{i,i}$ qui changent de signe.
Ici les résultats sont obtenus sans supposer l'existence d'une sursolution forte, et sans utiliser de matrice H couplée. Dans un premier temps, on s'interesse à des coefficients $m_{i,i}(x)$ stictement positifs sur Ω, dans un deuxième temps, on considère des coefficients $m_{i,i}$ qui changent de signe.

2.3.3 Résultats pour M positive

Les résultats que nous avons obtenus sons les suivants :

Théorème 2 ***Existence d'au moins une valeur propre principale***
Soit le système

$$(SvP)\qquad \begin{cases} \mathcal{L}U=\Lambda MU & \textit{sur } \Omega \\ U\overset{U_0}{=}0 & \textit{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où l'opérateur $\mathcal{L}$ s'applique à $U\in\left(W^{2,N}_{loc}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)\right)^p$. On suppose que
(i) les opérateurs L_i vérifient l'hypothèse (H_i) : ils sont elliptiques
(ii) ils vérifient aussi l'hypothèse (H'_i) de positivité

(iii) la matrice coopérative M vérifie les hypothèses (H_M) (bornée), et (H''_{M1}) (forte positivité des termes diagonaux).
Alors il existe au moins une valeur propre Λ_1, strictement positive, associée à un vecteur propre positif $\Phi = (\phi_i)_{1 \le i \le p}$.

Remarque 1 : Ce résultat généralise à la condition de Dirichlet raffinée un résultat obtenu par Hess [H] pour les ouverts réguliers, avec la condition de Dirichlet usuelle.
Dans cet article, Hess remarque, ce qui est vérifié ici aussi, qu'il n'y a pas d'unicité de la valeur propre ainsi déterminée.
En effet, il suffit de prendre $\begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix}$, avec L_1 et L_2 ayant deux valeurs principales distinctes, associées respectivement aux fonctions propres ϕ^* et ψ^*, M la matrice identité, et de considérer les deux vecteurs $\begin{pmatrix} \phi^* \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ \psi^* \end{pmatrix}$: ce sont deux vecteurs positifs, non colinéaires, associés chacun à une valeur propre positive différente.

Remarque 2 : Nous généralisons ainsi les résultats obtenus par Birindelli et al, [BMS] au cas $H = 0$, et donc sans aucune hypothèse de couplage. Il nous faut alors rajouter l'hypothèse de positivité H'_i pour utiliser le principe du maximum raffiné. [BMS] n'ont pas besoin de cette hypothèse : en ajoutant à L_i et aux termes diagonaux h_{ii} la même quantité, ils peuvent s'assurer du principe du maximum raffiné.

Proposition 5 *:* **Comparaison entre Λ_1 et $\lambda_1(m_{ii})$:**
On suppose les hypothèses du théorème 2 vérifiées. Soit Λ_1 une valeur propre principale associée à un vecteur propre positif $\Phi = (\phi_i)_{1 \le i \le p}$.

Soit $\lambda_1(m_{i,i})$ les valeurs propres principales des équations à poids :

(vp) $$L_i u = \lambda m_{i,i} u$$

avec la condition de Dirichlet raffinée au bord de Ω. Pour tout indice i tel que $\phi_i \not\equiv 0$ on a alors deux cas possibles :

- *Premier cas :* $\Lambda_1 < \inf_i \{\lambda_1(m_{i,i})\}$
- *Second cas : il existe un indice i tel que* $\Lambda_1 = \lambda_1(m_{i,i})$

Remarque : Dans le second cas, on peut avoir $\Lambda_1 > \lambda_1(m_{jj})$ pour un certain indice j, comme le montre le contre exemple de la remarque qui suit le théorème 2.

Le résultat suivant permet de préciser une condition suffisante pour avoir unicité de la valeur principale.

Théorème 3 *: **Existence et unicité de la valeur principale pour un système pleinement couplé.***
On suppose les hypothèses du théorème 2 vérifiées :
(i) les opérateurs $\mathcal{L}_i$ vérifient l'hypothèse (H_i) (opérateurs elliptiques).
(ii) ils vérifient aussi l'hypothèse (H_i') (positivité).
(iii) la matrice coopérative M vérifie les hypothèses (H_M) (bornée), et (H_{M2}'') (stricte positivité des termes diagonaux).
De plus, on suppose :
(iv) la matrice M vérifie l'hypothèse (H_M') : elle est pleinement couplée
Alors
(a)Il existe une valeur propre Λ_1, strictement positive, associée à un vecteur propre strictement positif.
(b) C'est l'unique valeur propre positive associée à un vecteur propre positif, et sa multiplicité algébrique est 1.
(c) Il n'y a pas de valeur propre dans l'intervalle $[0; \Lambda_1[$

Enfin nous obtenons un principe du maximum pour un système de la forme (SM) :

Théorème 4 *:* **Principe du maximum pour un système pleinement couplé**
Les hypothèses du théorème 3 étant vérifiées, soit le système (SM)

$$(SM) \qquad \begin{cases} \mathcal{L}U = \Lambda M U + F & sur\ \Omega \\ U \stackrel{U_0}{=} 0 & sur\ \partial\Omega \end{cases}$$

avec $F \in \left(L^N(\Omega)\right)^p$, $F \geq 0$ et $F \not\equiv 0$ alors
(i) si $0 < \Lambda < \Lambda_1$, il existe une solution unique $U \in \left(\left(W^{2,N}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)\right)\right)^p$ au système (SM) et $U > 0$
(ii) si $\Lambda = \Lambda_1$, quelque soit $F \geq 0$, $F \not\equiv 0$, il n'y a pas de solution $U \in \left(W^{2,N}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)\right)$ au système (SM)
(iii) si $\Lambda > \Lambda_1$, quelque soit $F \geq 0$, $F \not\equiv 0$, il n'y a pas de solution positive $U \in \left(W^{2,N}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)\right)$ au système (SM)

Il découle de ce théorème la caractérisation de la valeur principale pour les systèmes :

$$\Lambda_1 = \sup\left\{\Lambda \in \mathbb{R}, \exists \phi \in \left(W^{2,N}_{loc}(\Omega)\right)^p, \phi > 0 \text{ et } \Lambda M\phi \leq \mathcal{L}\phi\right\}$$

2.3.4 Résultats pour une matrice à coefficients diagonaux qui changent de signes.

On considère maintenant le système

$$(SB) \qquad \begin{cases} \mathcal{L}U = \Lambda BU & \text{sur } \Omega \\ U \stackrel{U_0}{=} 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec les hypothèses suivantes :
(i) les opérateurs $\mathcal{L}_i$ vérifient l'hypothèse (H_i) (opérateurs elliptiques).
(ii) ils vérifient aussi l'hypothèse (H_i') (positivité).
(iii) la matrice B, coopérative, vérifie l'hypothèse (H_M) (bornée)
(iv) la matrice B vérifie l'hypothèse (H_B') : elle est pleinement couplée

Théorème 5 *Sous les hypothèses précédentes, alors*
(a) Il existe une valeur propre Λ_1, strictement positive, associée à un vecteur propre strictement positif.
(b) C'est l'unique valeur propre positive associée à un vecteur propre positif, et sa multiplicité algébrique est 1.
(c) Il n'y a pas de valeur propre dans l'intervalle $]0; \Lambda_1[$

Chapitre 3

Démonstrations

3.1 Démonstrations des propositions 1, 2, 3 et 4

Démonstration de la proposition 1 :
La première proposition montre que la valeur principale associée au poids m est bien valeur propre. Elle provient directement des résultats pour les équations sans poids de Berestycki, Niremberg, Varadhan [BNV]. On suppose donc (H_L) et (H_m) réalisées.
On note $D^* = \{\lambda \in \mathbb{R} / \exists \phi > 0 \text{ sur } \Omega, \, t.q. \, \lambda\phi \leq L\phi\}$ et $\lambda^* = \sup D^*$ est la valeur principale de L sans poids.
On note de même $D_m = \{\lambda \in \mathbb{R} / \exists \phi > 0 \text{ sur } \Omega, \, t.q. \, \lambda m\phi \leq L\phi\}$ et $\lambda_1(m) = \sup D_m$ la valeur principale avec le poids m.
• On montre d'abord que $\lambda_1(m)$ et λ^* sont de même signe
On sait que puisque m vérifie l'hypothèse (H_m), il existe deux réels α et β tels que $0 < \alpha \leq m \leq \beta$.
Dans le cas où $\lambda^* > 0$, soit $\lambda > 0 \in D^*$; il existe $\phi > 0$ sur Ω, $t.q. \, \lambda\phi \leq L\phi$, et donc $\dfrac{\lambda}{\beta} m\phi \leq L\phi$. Donc $\dfrac{\lambda}{\beta} \in D_m$; ce qui entraîne $0 < \dfrac{\lambda^*}{\beta} \leq \lambda_1(m)$
De plus, pour tout $\lambda > 0 \in D_m$, il existe $\phi > 0$ sur Ω, $t.q. \, \lambda m\phi \leq L\phi$. Donc $\alpha\lambda\phi \leq L\phi$: $\alpha\lambda \in D^*$. On obtient alors $\alpha\lambda_1(m) \leq \lambda^*$, qui entraîne que $\lambda_1(m)$ est fini, et l'encadrement

$$\alpha\lambda_1(m) \leq \lambda^* \leq \beta\lambda_1(m) \text{ lorsque } \lambda^* > 0.$$

Dans le cas où $\lambda^* \leq 0$, supposons qu'il existe $\lambda > 0 \in D_m$.
Alors, il existe $\phi > 0$ sur Ω, $t.q. \, \lambda m\phi \leq L\phi$. Donc $\alpha\lambda\phi \leq L\phi$: $\alpha\lambda \in D^*$. On obtient alors $0 < \alpha\lambda \leq \lambda^*$: ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $\lambda^* \leq 0$. Finalement, tout réel $\lambda \in D_m$ est négatif ou nul, donc $\lambda_1(m) \leq 0$. En raisonnant

comme précédemment, on obtient l'encadrement

$$\beta\lambda_1(m) \leq \lambda^* \leq \alpha\lambda_1(m) \text{ lorsque } \lambda^* \leq 0.$$

En particulier, si $\lambda_1(m) = 0$, on aura $\lambda^* = 0$.

• On montre maintenant que $\lambda_1(m)$ est valeur propre.
Puisque $a_0 - \lambda_1(m)m \in L^\infty(\Omega)$, l'opérateur $S = L - \lambda_1(m)m$ vérifie les hypothèses (H_L). Il a pour valeur principale, en l'associant au poids m, $\lambda_{1,S}(m) = 0$; et donc on a $\lambda_S^* = 0$. D'après le théorème 2.1 [BNV] p 57, qui donne le résultat pour les équations sans poids : $\lambda_S^* = 0$ est valeur propre ; une fonction propre associée à $\lambda_S^* = 0$ est aussi fonction propre associée à $\lambda_{1,S}(m) = 0$. Cette fonction est fonction propre de L pour le poids m, associé à la valeur principale $\lambda_1(m)$; les autres propriétés découlent immédiatement du théorème 2.1 de [BNV]

Nous montrons maintenant les deux propositions, concernant une équation, qui interviennent dans les démonstrations des résultats obtenus sur les systèmes.

Démonstration de la proposition 2
principe du maximum fort raffiné pour le poids $m \equiv 1$
Remarquons d'abord que puisque $\lambda^* > 0$, et que la fonction u est minorée, le principe du maximum raffiné s'applique et $u \geq 0$.
Le principe du maximum fort usuel s'énonce :

Théorème 6 *([GT] théorème 9.6 p 225) Le domaine Ω étant borné, et L uniformément elliptique avec $a_0 \geq 0$, si $u \in W^{2,N}_{loc}(\Omega)$ vérifie $Lu \geq 0$ sur Ω, alors u ne peut atteindre son minimum sur Ω, sauf si u est constante.*

Lorsque $a_0 \geq 0$, nous avons directement le résultat.
Pour $a_0 < 0$, on remarque que si $Lu \geq 0$, $-a_0 u \geq 0$ et donc $L'u = Lu - a_0 u \geq 0$.
L'opérateur L' vérifie les hypothèses du théorème ci-dessus, par conséquent u ne peut atteindre son minimum sur Ω sauf si u est constante. Puisque ce minimum est positif ou nul et que u n'est pas identiquement nulle, on a $u > 0$ sur Ω ■

Démonstration de la proposition 3 : Signe de $L - \lambda m$

La proposition 3 donne le signe de $L - \lambda m$; elle découle très directement des résultats sur les équations sans poids.

Soit un réel λ. La fonction m vérifie (H_m) et l'opérateur L vérifie (H_L). Posons $S = L - \lambda m$. La fonction $a_0 - \lambda m$ est dans $L^\infty(\Omega)$, et donc S est bien de la forme des opérateurs étudiés.
L'opérateur S associé au poids m a pour valeur principale, associée au poids m : $\lambda_{1,S}(m) = \lambda_1(m) - \lambda$, qui est du même signe que la valeur principale de S, considéré sans poids, λ_S^*

Si $\lambda < \lambda_1(m)$, on en déduit que $\lambda_S^* > 0$; d'après la proposition 2, le principe du maximum fort raffiné est vérifié par S, et donc si $Su \geq 0$, alors u est strictement positive sur Ω.

Si $\lambda \geq \lambda_1(m)$, on utilise le lemme suivant qui est une simple adaptation d'un corollaire de [BNV](corollaire 2.2 p58)

Lemme 1 *Si v, minorée, est telle que $Lv \geq \lambda_1(m)mv$ et vérifie, pour toute suite (x_j) de points de Ω convergeant vers x de $\partial\Omega$ avec $u_0(x) = 0$, $\liminf v(x_j) \geq 0$ alors v est égale à une constante multipliée par ϕ_1*

En appliquant ce lemme à une fonction u positive ou nulle, vérifiant la condition de Dirichlet raffinée, on ne peut avoir $Lu \geq \lambda mu$ que si u est une constante multipliée par ϕ_1 ; on a alors $Lu = \lambda_1(m)mu$. Il est impossible d'avoir $Lu - \lambda mu$ positif non identiquement nul. Pour $\lambda > \lambda_1(m)$ il n'y a pas de solution positive au système $(S1) : \begin{cases} Lu = \lambda mu + f \\ u \overset{u_0}{=} 0 \end{cases}$. ■

<u>Démonstration de la proposition 4 : Poids indéfini</u>

<u>Notations</u> On note $g^+ = max(g, 0)$ et g^- définie par $g = g^+ - g^-$. On utilise aussi $\Omega^+ = \{x \in \Omega, g(x) > 0\}$; $\Omega^0 = \{x \in \Omega, g(x) = 0\}$ et $\Omega^- = \{x \in \Omega, g(x) < 0\}$.
Le théorème 3.2 de [FHT] donne l'existence de la valeur principale $\lambda_1(L, g, \Omega)$.

Nous commençons par nous intéresser à des propriétés la valeur principale pour un poids strictement positif, ce qui généralise les résultats pour les poids bornés par des constantes strictement positives. D'après le théorème 3.2 de [FHT], si $p \in L^\infty$ est un poids strictement positif sur Ω, alors il existe une valeur principale $\lambda_1(L, p, \Omega) > 0$, qui est l'unique valeur propre positive associée à une fonction propre positive.

Lemme 2 *Soit $p \in L^\infty$ un poids strictement positif sur Ω et λ un réel. Alors*
- *Si $\lambda < \lambda_1(L, p, \Omega)$ l'opérateur $L - \lambda p$ améliore la positivité*
- *Si $\lambda \geq \lambda_1(L, p, \Omega)$ alors pour $u > 0$, on a $Lu - \lambda pu \geq 0$ sur Ω si et seulement si $\lambda = \lambda_1(L, p, \Omega)$ et u est un multiple de la fonction propre. En particulier, il est impossible d'avoir $Lu - \lambda pu \geq 0$ avec $Lu - \lambda pu \not\equiv 0$*

La valeur principale $\lambda_1(L, p, \Omega)$ est valeur propre, associée à la fonction strictement positive ϕ_1, normalisée par $\phi_1(x_0) = 1$ en un certain x_0 de Ω. Soit λ un réel. On pose comme précédemment $S_\lambda = L - \lambda p$. On a $S_\lambda\phi_1 = (\lambda_1(L, p, \Omega) - \lambda)\,\phi_1$.
- Si $\lambda < \lambda_1(L, p, \Omega)$, on a $S_\lambda\phi_1 > 0$. D'après le corollaire 2, donné en annexe, ce n'est possible que si la valeur propre $\lambda^*(S_\lambda)$ est strictement positive. Alors le principe du maximum fort s'applique à S_λ.

– Si $\lambda \geq \lambda_1(L,p,\Omega)$, on montre par l'absurde le résultat : on suppose qu'il existe une fonction $u > 0$ telle que $S_\lambda u \geq 0$. Alors $S_{\lambda_1(L,p,\Omega)}(u) = S_\lambda u + (\lambda - \lambda_1(L,p,\Omega))pu$. Puisque $S_\lambda u \geq 0$ et $\lambda - \lambda_1(L,p,\Omega) > 0$, on a $S_{\lambda_1(L,p,\Omega)}(u) > 0$. Or $S_{\lambda_1(L,p,\Omega)}(\phi_1) = 0$. Donc 0 est valeur propre de l'opérateur $S_{\lambda_1(L,p,\Omega)}$ associé à une fonction propre strictement positive. La valeur principale de $S_{\lambda_1(L,p,\Omega)}$ est 0. D'après le corollaire 2, donné en annexe, on ne peut avoir $S_{\lambda_1(L,p,\Omega)}(u) \geq 0$ que si la valeur principale de $S_{\lambda_1(L,p,\Omega)}$ est strictement positive, -ce qui est impossible- ou si $S_{\lambda_1(L,p,\Omega)}u = 0$ -ce qui est impossible aussi, sauf si u est un multiple de ϕ_1

En conséquence du lemme, on peut écrire pour un poids strictement positif la valeur principale sous la forme $\lambda_1(L,p,\Omega) = \sup \left\{ \lambda \in \mathbb{R},\ \exists \phi > 0, \phi \in W^{2,N}_{loc}(\Omega),\ \lambda p \phi \leq L\phi \right\}$

Nous allons nous intéresser aux propriétés de la valeur principale considérée comme une fonction de a_0.

Lemme 3 *Soit $p \in L^\infty$ un poids strictement positif. Notons $\lambda_1(a_0)$ la valeur principale $\lambda_1(L,p,\Omega)$ considérée dans sa dépendance à a_0. Alors la fonction qui à a_0 associe $\lambda_1(a_0)$ est une fonction concave, strictement croissante (si $\widehat{a_0} \geq a_0$, $\widehat{a_0} \not\equiv a_0$ alors $\lambda_1(\widehat{a_0}) > \lambda_1(a_0)$).*

<u>Remarque</u> : Pour un poids borné par des constantes strictement positives, ce résultat découle immédiatement de la proposition 2.1 p 59 dans [BNV].

On a $\lambda_1(a_0) = \sup \left\{ \lambda \in \mathbb{R},\ \exists \phi > 0, \phi \in W^{2,N}_{loc}(\Omega),\ \lambda p \phi \leq (L' + a_0)\phi \right\}$, ce qui entraîne immédiatement la croissance en a_0, au sens large.
Soit $\hat{a_0} \geq a_0$, $\widehat{a_0} \not\equiv a_0$. Posons ψ la fonction propre strictement positive associée à $\lambda_1(a_0)$.
On a $(L^+ + \widehat{a_0} - \lambda_1(a_0))\, p\psi = (\widehat{a_0} - a_0)p\psi \geq 0$, avec $(\widehat{a_0} - a_0)p\psi \not\equiv 0$ puisque $\psi > 0$, $p > 0$ et $a_0 - \widehat{a_0} \not\equiv 0$. D'après le lemme 2, cela n'est possible que si $\lambda_1(\widehat{a_0}) > \lambda_1(a_0)$

Pour montrer la concavité, nous utilisons la même technique que [BNV] page 68. Soit $\phi > 0$; soit z telle que $e^z = \phi$; lorsque $\phi \in W^{2,N}_{loc}(\Omega)$, on a $z \in W^{2,N}_{loc}(\Omega)$. On a $L^+\phi = L^+ z\phi + \sum_{i,j=1}^N a_{i,j} \dfrac{\partial z}{\partial x_i}\dfrac{\partial z}{\partial x_j}\phi$.

Posons $F(z) = -L^+ z - \sum_{i,j=1}^N a_{i,j} \dfrac{\partial z}{\partial x_i}\dfrac{\partial z}{\partial x_j}$. F est une fonction convexe de z ([BNV] p 50)

Soit A l'ensemble des éléments z de $W^{2,N}_{loc}(\Omega)$ tels que $F(z)$ est majorée. La valeur principale est : $\lambda_1(a_0) = \sup_{z \in A} \inf_{x \in \Omega} \left\{ \dfrac{-F(z) + a_0}{p} \right\}$.

Pour tout a_0 et $\widehat{a_0}$ dans L^∞, pour tout z et tout $\widehat{z}$ de A, pour tout réel $t \in [0;1]$, on a, par convexité de F :

$$F(tz + (1-t)\widehat{z}) - ta_0 - (1-t)\widehat{a_0} \leq tF(z) + (1-t)F(\widehat{z}) - ta_0 - (1-t)\widehat{a_0}$$

Le poids p étant strictement positif, on peut écrire

$$\frac{-F(tz + (1-t)\widehat{z}) + ta_0 + (1-t)\widehat{a_0}}{p} \geq t\frac{-F(z) + a_0}{p} + (1-t)\frac{-F(\widehat{z}) + \widehat{a_0}}{p},$$

donc

$$\frac{-F(tz + (1-t)\widehat{z}) + ta_0 + (1-t)\widehat{a_0}}{p} \geq t \inf_{x\in\Omega}\left\{\frac{-F(z) + a_0}{p}\right\} + (1-t)\inf_{x\in\Omega}\left\{\frac{-F(\widehat{z}) + \widehat{a_0}}{p}\right\},$$

d'où

$$\lambda_1(ta_0 + (1-t)\widehat{a_0}) \geq t\inf_{x\in\Omega}\left\{\frac{-F(z) + a_0}{p}\right\} + (1-t)\inf_{x\in\Omega}\left\{\frac{-F(\widehat{z}) + \widehat{a_0}}{p}\right\},$$

ce qui permet de conclure : $\lambda_1(ta_0 + (1-t)\widehat{a_0}) \geq t\lambda_1(a_0) + (1-t)\lambda_1(\widehat{a_0})$.

Maintenant, on considère $Lu + tqu = \lambda pu$, où q appartient à $L^\infty(\Omega)$. Le poids p est strictement positif sur Ω, et t représente un paramètre réel.
Ce problème possède une valeur propre principale positive que l'on note $r(tq, p, \Omega)$. La fonction qui, au réel t, associe $r(tq, p, \Omega)$ est continue, strictement croissante et concave. De plus, on a $r(tq, p, \Omega) = \sup_{\phi > 0}\inf_{\Omega}\left(\frac{L\phi}{p\phi}\right)$, où $\phi \in W^{2,N}_{loc}(\Omega)$. Il en résulte que $r(tq, p, \Omega) \leq r(ta_0, p, \Omega')$ pour $\Omega' \subset \Omega$.

On transforme l'équation $Lu = \lambda gu + f$ comme dans [FHT] : on a $(L + \lambda q)u = \lambda pu + f$ avec $q = g^- + \chi_{\Omega^0 \cup \Omega^-}$ et $p = g^+ + \chi_{\Omega^0 \cup \Omega^-}$. Ainsi p est positif et bornée, q est positive et bornée.

Soit $r(\lambda q, p, \Omega)$ la valeur principale de $L + \lambda q$ associé au poids p. Il résulte de ce qui précède que $r(\lambda q, p, \Omega)$ est concave, stictement croissante en λ et majorée par $r(\lambda q, p, \Omega^+) = \lambda_1(L, g^+, \Omega^+)$. De plus $r(0, p, \Omega = \lambda_1(L, p, \Omega) > 0$. Donc $r(\lambda q, p, \Omega)$ admet un unique point fixe. Cette valeur est en fait la valeur principale $\lambda_1(L, g, \Omega)$ ([FHT])

Puisque $\lambda_1(L, g, \Omega)$ est l'unique point fixe de $r(\lambda q, p, \Omega)$, les propriétés de la fonction $r(\lambda q, p, \Omega)$ permettent d'affirmer que $\lambda < \lambda_1(L, g, \Omega)$ si et seulement si $\lambda < r(\lambda q, p, \Omega)$. On est en mesure d'en déduire le principe du maximum raffiné

fort.
Donc, dans le cas $\lambda < \lambda_1(L, g, \Omega)$,on sait que λ est inférieur à la valeur principale $r(\lambda q, p, \Omega)$. D'après la proposition 3, si u est solution de $(L+\lambda q)u = \lambda pu + f$, c'est à dire de $Lu = \lambda gu + f$, alors $u > 0$.
Lorsque $\lambda \geq \lambda_1(L, g, \Omega)$, λ est supérieur à la valeur principale $r(\lambda q, p, \Omega)$ et, d'après la proposition 3, si u est solution de $(L + \lambda q)u = \lambda pu + f$, alors $u \geq 0$ si et seulement si $\lambda = r(\lambda q, p, \Omega)$ et u est un multiple de la fonction propre. Il n'existe donc de solution positive que pour le point fixe de r, c'est à dire $\lambda_1(L, g, \Omega)$, et ce sont alors les multiples de la fonction propre.

3.2 Résultats sur les systèmes

Le théorème 2 concerne l'existence d'une valeur propre associée à un vecteur propre positif. Cette démonstration utilise le théorème de Krein-Rutman, en suivant une technique de Birindelli, [Bi], qui permet d'obtenir le résultat même lorsque le cône positif est d'intérieur vide.

Démonstration du théorème 2 :
• Remarquons d'abord que la matrice M vérifiant l'hypothèse (H''_{M1}), il existe un réel α, tel que $m_{i,i}(x) > \alpha$ pour tout x de $\overline{\Omega}$ et tout indice i.

• Propriétés de $\mathcal{L}^{-1}M$
Soit les opérateurs T_i, définis de $L^N(\Omega)$ dans $L^N(\Omega)$ qui à tout $f \in L^N(\Omega)$ associent u tel que $L_i u = f$et $u \overset{u_0}{=} 0$ sur $\partial\Omega$. (Rappelons qu'en fait $u \in W^{2,N}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$).
D'après Birindelli [Bi], on sait que ces opérateurs sont bien définis, et qu'ils sont linéaires, compacts et positifs.
L'opérateur $\mathcal{T} = diag(T_i)$ est donc compact et positif dans $(L^N(\Omega))^p$
Les coefficients $m_{i,j}$ étant positifs et étant dans L^∞, l'opérateur qui à U de $\left(L^N(\Omega)\right)^p$ associe MU de $\left(L^N(\Omega)\right)^p$ est borné et positif.
Posons $A = \mathcal{T}M = \mathcal{L}^{-1}M$
Cet opérateur est le produit de deux opérateurs positifs, donc il est positif. Il est le produit d'un opérateur compact avec un opérateur borné, donc il est compact.

• Utilisation du théorème de Krein-Rutman
L'énoncé du théorème de Krein-Rutman est le suivant :

Théorème 7 Théorème de Krein-Rutman *(Birindelli [Bi] théorème 2.6 p 456)) Soit (X, P) un espace de Banach ordonné, de cône positif P, fermé, convexe, total (càd $X = \overline{P - P}$). On suppose $T \in L(X)$ compact tel que $T(P) \subset P$*
Si il existe $e \neq 0 \in P$ et une constante strictement positive ρ telle que $Te - \rho e \in P$
Alors le rayon spectral : $r(T)$ est strictement positif. Le rayon spectral est valeur

propre de T et de son dual T^* de vecteurs propres associés respectivement ϕ dans P et ψ dans P^*.

Dans cet énoncé du théorème de Krein-Rutman, nous n'avons pas besoin d'un cône d'intérieur non vide ; la simple hypothèse de cône total, qui est vérifée pour le cône positif dans $\left(L^N(\Omega)\right)^p$, et l'existence de $E > 0$ convient.

On cherche donc l'existence de $E \neq 0,\ E \in \left(L^N(\Omega)\right)^p \cap P$, tel qu'il existe une constante $\rho > 0$ telle que $AE - \rho E$ appartienne au cône positif.

Or on sait (Birindelli [Bi] p 459) qu'il existe $e_i \geq 0,\ e_i \in L^N(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, et une constante $\rho_i > 0$ telle que $T_i e_i \geq \rho_i e_i$. Alors, puisque les T_i sont linéaires et positifs, on a $T_i\left(\sum_{k=1}^{p} m_{ik}e_k\right) \geq T(m_{i,i}e_i) \geq \alpha T(e_i) \geq \alpha\rho_i e_i$, pour chaque indice i entre 0 et p.

Si on choisit $E = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_p \end{pmatrix}$ on obtient bien $AE \geq \min_i(\alpha\rho_i)E$

On peut donc appliquer le théorème de Krein-Rutman : il existe $r > 0$ et Φ,vecteur du cône positif tels que $A\Phi = r\Phi$, ce qui équivaut, en posant $\Lambda_1 = \dfrac{1}{r}$ à $L\Phi = \Lambda_1 M\Phi$ ■

Démonstration de la proposition 5 :

La proposition suivante (proposition 5) permet de comparer une valeur propre Λ_1 issue du système précédent à la valeur principale $\lambda_1(m_{i,i})$ de chaque ligne
Soit ϕ_i les composantes du vecteur Φ, vecteur propre positif associé à Λ_1. On a :

$$L_i\phi_i = \Lambda_1 m_{i,i}\phi_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{p} \Lambda_1 m_{i,j}\phi_j$$

On a toujours $\sum_{j=1, j\neq i}^{p} \Lambda_1 m_{i,j}\phi_j \geq 0$ d'après l'hypothèse de positivité (H'_M).
D'après la proposition 3, l'équation $L_i u = \Lambda_1 m_{i,i}u + f$ avec $f \geq 0$ ne peut avoir une solution positive, que

- si $\Lambda_1 < \lambda_1(m_{i,i})$; alors $\sum_{j=1, j\neq i}^{p} \Lambda_1 m_{i,j}\phi_j \neq 0$
- si $\Lambda_1 = \lambda_1(m_{i,i})$, ϕ_i étant alors, à un facteur multiplicatif près la fonction propre associée, et $\sum_{j=1, j\neq i}^{p} \Lambda_1 m_{i,j}\phi_j = 0$ ■

Démonstration du théorème 3 :

Le théorème suivant, le théorème 3 est le théorème qui précise des hypothèses suffisantes pour avoir unicité de la valeur propre principale.
Soit les opérateur T_i, défini de $L^N(\Omega)$ dans $L^N(\Omega)$ qui à tout $f \in L^N(\Omega)$ associent u tel que $L_i u = f$et $u \overset{u_0}{=} 0$ sur $\partial\Omega$. (Rappelons qu'en fait $u \in W^{2,N}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$).
D'après Birindelli [Bi], on sait que ces opérateurs sont bien définis, et qu'ils sont linéaires, compacts et positifs.
L'opérateur $\mathcal{T} = diag(T_i)$ est donc compact et positif dans $(L^N(\Omega))^p$
La matrice M étant coopérative, vérifiant l'hypothèse (H''_{M2}), les composantes m_{ij} étant dans L^∞, l'opérateur qui à U de $\left(L^N(\Omega)\right)^p$ associe MU de $\left(L^N(\Omega)\right)^p$ est borné et positif.
Posons $A = \mathcal{T}M = \mathcal{L}^{-1}M$ comme précédemment

• **PREMIERE PARTIE : Positivité de A**
On a vu que cet opérateur est compact. Nous allons montrer le lemme suivant :

Lemme 4 *On suppose les hypothèses du théorème 3 vérifiées. Soit $F \in \left(L^N(\Omega)\right)^p$, on suppose $F \geq 0$, $F \not\equiv 0$. Alors AF est un point quasi-intérieur du cône positif de $\left(L^N(\Omega)\right)^p$.*

On note $F = (f_j)$, et $U = (u_j)$ l'image de F par A. On a donc $U = AF$
Le vecteur F a au moins une composante non identiquement nulle. Nous pouvons admettre, sans nuire à la généralité du problème, qu'il s'agit de la première, f_1
Première étape : on montre que u_1 est strictement positive
La première ligne dans l'égalité $U = AF$ s'écrit $T_1(\sum_{i=1}^p m_{1,j} f_j) = u_1$, c'est à dire $L_1 u_1 = m_{1,1} f_1 + \sum_{j=2}^p m_{1,j} f_j$. Le membre de droite est positif, non identiquement nul, puisque $f_1 \not\equiv 0$ et $m_{1,1} > 0$
On obtient donc, d'après la proposition 2, que u_1 est une fonction strictement positive.

Seconde étape : les autres composantes u_i du vecteur U sont strictement positives

Sur la première colonne, M étant pleinement couplée, il existe un indice i tel que : $m_{i,1} \not\equiv 0$. Nous pouvons supposer que cet indice soit $i = 2$.
La ligne 2 de l'égalité $U = AF$ permet d'écrire $L_2 u_2 = m_{2,1} f_1 + \sum_{j=2}^p m_{2,j} f_j$. Puisque $f_1 > 0$ sur Ω, que $m_{2,1}$ positif , $m_{2,1} \neq 0$ et que $\sum_{j=2}^{p} m_{2,j} f_j \geq 0$, le membre de droite est positif, non identiquement nul. D'après la proposition 2, u_2 est strictement positive sur Ω. Si $p = 2$, le résultat est démontré. Sinon, on poursuit le raisonnement :

Si pour un entier $1 < n < p$, on a f_j strictement positive sur Ω pour tout indice $1 \leq j \leq n$, la matrice M étant pleinement couplée, elle ne peut contenir un bloc

triangulaire inférieur de 0 de la forme $0_{p-n;n}$. Autrement dit, parmi les composantes $m_{i,j}$ de M, avec $n+1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq n$, il en existe au moins une qui est non identiquement nulle. Supposons que ce soit pour $i = n+1$.
Alors pour la ligne $n+1$, on obtient :

$$L_{n+1}u_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} m_{n+1,j} f_j + \sum_{j=n+1}^{p} m_{n+1,j} f_j$$

Nous savons qu'il existe un indice j inférieur à n tel que $m_{n+1,j}$ est non identiquement nul, et que toutes les fonctions f_j sont strictement positives pour $1 \leq j \leq n$. Donc le terme $\sum_{j=1}^{n} m_{n+1,j} f_j$ est strictement positif.
Le membre de droite étant positif, non identiquement nul, d'après la proposition 2, u_{n+1} est strictement positive sur Ω.
En procédant ainsi jusqu'à p, on a toutes les composantes u_i du vecteur U qui sont strictement positives sur Ω.

• **SECONDE PARTIE : Unicité, simplicité de la valeur principale**
On utilise ici un théorème de Daners - Koch -Medina ([DKM]), appliqué à l'opérateur $A = \mathcal{L}^{-1}M$.

Théorème 8 *Soit E un espace de Banach ordonné et $T \in L(E)$ un opérateur positif irréductible. On suppose de plus que T est compact et E est un treillis de Banach. Alors les propositions suivantes sont vérifiées :*

1. *le rayon spectral $r(T) > 0$ est un pôle de la résolvante de T d'ordre 1*
2. *$r(T)$ est une valeur propre algébriquement simple de T, le vecteur propre associé étant un point quasi intérieur de E*
3. *$r(T)$ est une valeur propre algébriquement simple de l'adjoint T', la fonction propre associée étant strictement positive*
4. *$r(T)$ est l'unique valeur propre associé à une fonction propre positive.*

Le lemme a permis de montrer que A est un opérateur irréductible ; il est positif, compact. Nous pouvons appliquer le théorème de [DKM] : le rayon spectral $r(A)$ est une valeur propre simple strictement positive, qui est la seule valeur propre positive associée à une fonction propre positive. Soit Φ cette fonction propre. L'égalité $A\Phi = r(A)\Phi$ équivaut à $\mathcal{L}\Phi = \dfrac{1}{r(A)}M\Phi$. On arrive bien à l'unicité et la simplicité de la valeur propre positive $\Lambda_1 = \dfrac{1}{r(A)}$ associée à une fonction propre positive.

Autres valeurs propres On démontre maintenant le point (c) du théorème 3

Soit $\Lambda > 0$ une valeur propre de $\mathcal{L}$ associé à la matrice M. Alors $\dfrac{1}{\Lambda} > 0$ est valeur

propre de A, et donc est inférieur au rayon spectral de A. On a donc $\dfrac{1}{\Lambda} < \dfrac{1}{\Lambda_1}$: il n'y a pas de valeur propre dans l'intervalle $]0;\Lambda_1[$.
Le réel 0 est valeur propre de $\mathcal{L}$ associé à la matrice M si et seulement si 0 est valeur propre de chaque ligne, ce qui n'est pas possible d'après l'hypothèse (H_i') de positivité. Donc il n'y pas de valeur propre pour $\mathcal{L}$ associé à la matrice M dans l'intervalle $[0;\Lambda_1[$. ■

<u>**Démonstration du théorème 4 :**</u>

Nous montrons maintenant le théorème 4 ; c'est un principe du maximum pour les systèmes :

$$(SM) \qquad \begin{cases} \mathcal{L}U = \Lambda M U + F & \text{sur } \Omega \\ U \overset{U_0}{=} 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Pour $0 < \Lambda < \Lambda_1$, on pose à nouveau $A = \mathcal{T}M$. L'égalité $LU = \Lambda MU + F$ est équivalente à $U = \Lambda AU + \mathcal{T}F$, c'est à dire $(I - \Lambda A)U = \mathcal{T}F$. Le rayon spectral de ΛA est $\dfrac{\Lambda}{\Lambda_1}$; en utilisant les séries de Neumann, on obtient que $I - \Lambda A$ est un opérateur inversible, d'inverse strictement positif. D'où $U = (I - \Lambda A)^{-1}\mathcal{T}F$.
L'opérateur $\mathcal{T}$ est fortement positif, $(I - \Lambda A)^{-1}$ strictement positif, donc $U > 0$.
Pour la suite de cette démonstration, nous utilisons le théorème 9 de [BMS], (p 8 théorème 6) que nous rappelons maintenant

Théorème 9 *[BMS, p 8] soit $F \in \left(L^N(\Omega)\right)^p$, $F > 0$. On considère le problème P :*

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - H)U = \Lambda M U + F & \textit{sur } \Omega \\ U \overset{U_0}{=} 0 & \textit{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On suppose vérifiées les hypothèses suivantes :

- *il existe une supersolution forte de $\mathcal{L} - H$*
- *H est coopérative*
- *H est pleinement couplée*
- *M est coopérative*
- *$m_{i,i}(x) > 0$ pour un indice $i \in 1, \dots, p$ et un élément $x \in \Omega$*

alors
(i) si $0 \leq \Lambda < \Lambda_1$, il existe une solution unique $U \in \left(W^{2,N}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)\right)$ au problème P et $U > 0$
Si de plus M est à coefficients positifs, on a
(ii) si $\Lambda = \Lambda_1$, quelque soit $F \geq 0$, $F \not\equiv 0$, il n'y a pas de solution au problème P
(iii) si $\Lambda > \Lambda_1$, quelque soit $F \geq 0$, $F \not\equiv 0$, il n'y a pas de solution positive au problème P

Soit $\Lambda > 0$ un réel ; nous allons nous interesser au système

$$\begin{cases} \mathcal{L}U - \dfrac{\Lambda}{2}MU = \mu MU + F & \text{sur } \Omega \\ U \overset{U_0}{=} 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Le vecteur principal Φ vérifie $\mathcal{L}\Phi - \dfrac{\Lambda}{2}M\Phi = \left(\Lambda_1 - \dfrac{\Lambda}{2}\right)\Phi$

Si on a $\Lambda_1 - \dfrac{\Lambda}{2}$ strictement positif, autrement dit $\Lambda < 2\Lambda_1$ alors Φ est une sursolution forte et $\Lambda_1 - \dfrac{\Lambda}{2}$ est la valeur principale de ce système.

La matrice $\dfrac{\Lambda}{2}M$ est coopérative et pleinement couplée.
D'après le théorème 9, puisque M a ses coefficients positifs,

- pour $0 < \mu < \Lambda_1 - \dfrac{\Lambda}{2}$ il existe une unique solution U et $U >> 0$ sur Ω. En particulier, si $0 < \Lambda < \Lambda_1$, en prenant $\mu = \dfrac{\Lambda}{2} < \Lambda_1 - \dfrac{\Lambda}{2}$, on a bien existence d'une unique solution positive. Il est équivalent pour U d'être solution du système ci-dessus ou d'être solution de

$$\begin{cases} \mathcal{L}U = \Lambda MU + F & \text{sur } \Omega \\ U \overset{U_0}{=} 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

  Nous avons une solution unique, positive si $F > 0$: la proposition (i) du théorème 4 est démontrée.
- pour $\mu = \Lambda_1 - \dfrac{\Lambda}{2}$, le théorème 9 affirme qu'il n'y a pas de solution lorsque $F > 0$. Cela est vrai en particulier si nous prenons $\Lambda = \Lambda_1$ et $\mu = \dfrac{\Lambda_1}{2}$. Or, dans ce cas, l'égalité

$$\mathcal{L}U - \frac{\Lambda}{2}MU = \mu MU + F$$

  est équivalente à

$$\mathcal{L}U = \Lambda_1 MU + F.$$

  La proposition (ii) du théorème est donc prouvée.
- Dans le cas $\mu > \Lambda_1 - \dfrac{\Lambda}{2}$, quelquesoit $F > 0$, d'après le théorème 9, il n'y a pas de solution positive. En particulier, si $\Lambda_1 < \Lambda < 2\Lambda_1$, en prenant

$\mu = \dfrac{\Lambda}{2} > \Lambda_1 - \dfrac{\Lambda}{2}$, il n'y a pas de solution positive à

$$\begin{cases} \mathcal{L}U - \dfrac{\Lambda}{2}MU = \dfrac{\Lambda}{2}MU + F & \text{sur } \Omega \\ U \overset{U_0}{=} 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

c'est à dire pas de solution positive à :

$$\begin{cases} \mathcal{L}U = \Lambda MU + F & \text{sur } \Omega \\ U \overset{U_0}{=} 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Nous avons démontré la proposition (iii) uniquement pour $\Lambda_1 < \Lambda < 2\Lambda_1$ Pour terminer cette démonstration il faut s'interesser à $\Lambda \geq 2\Lambda_1$.
Dans ce cas, on peut toujours trouver un entier n tel que $n\Lambda_1 > \Lambda$. On considère alors le système :

$$\begin{cases} \mathcal{L}U - \dfrac{\Lambda}{n}MU = \mu MU + F & \text{sur } \Omega \\ U \overset{U_0}{=} 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Le vecteur principal Φ vérifie $\mathcal{L}\Phi - \dfrac{\Lambda}{n}M\Phi = \left(\Lambda_1 - \dfrac{\Lambda}{n}\right)\Phi > 0$; c'est donc une sursolution forte de $\mathcal{L} - \dfrac{\Lambda}{n}M$. La valeur principale est $\Lambda_1 - \dfrac{\Lambda}{n}$
Dans le cas $\mu > \Lambda_1 - \dfrac{\Lambda}{n}$, nous savons d'après le théorème 9 que si $F > 0$, il n'y a pas de solution positive. Cela est vrai en particulier si nous prenons $\mu = \Lambda - \dfrac{\Lambda}{n}$.
Or dans ce cas, le système ci-dessus est équivalent à

$$\begin{cases} \mathcal{L}U = \Lambda MU + F & \text{sur } \Omega \\ U \overset{U_0}{=} 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Nous avons entièrement montré la proposition (iii) du théorème 4. ■

<u>Démonstration du théorème 5 :</u>

Lorsque les coefficients diagonaux changent de signe, on utilise la même technique que pour une équation à poids indéfini. Le système

$$(SB) \qquad \begin{cases} \mathcal{L}U = \Lambda BU & \text{sur } \Omega \\ U \overset{U_0}{=} 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

s'écrit alors

$$(SB) \qquad \begin{cases} \mathcal{L}U + \Lambda QU = \Lambda PU & \text{sur } \Omega \\ U \overset{U_0}{=} 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où Q est la matrice diagonale : $Q = diag(q_k)$ avec $q_k = b_{kk}^- + \chi_k$, où χ_k est la fonction caractéristique de l'ensemble $\{x \in \Omega,\ b_{kk} \leq 0\}$, et $P = (p_{jk})$ avec pour $j \neq k$, $p_{jk} = b_{jk}$ et $p_{kk} = b_{kk}^+ + \chi_k$.
Soit t un paramètre réel. On considère le système à matrice positive

$$(SB) \qquad \begin{cases} \mathcal{L}U + tQU = \Lambda(t)PU & \text{sur } \Omega \\ U \overset{U_0}{=} 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Un réel Λ est solution de (SB) si et seulement si il est point fixe de $t \to \Lambda(t)$.
On remarque que si B est pleinement couplée, il en est de même pour P.
Comme Q est à coefficients positifs ou nuls, la fonction $t \to \Lambda(t)$ est croissante. Or $\Lambda(t) < \lambda^*(Lk + tq_k, p_{kk}, \Omega)$ pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$. La première remarque permet d'affirmer que l'on peut appliquer les résultats du paragraphe précédent. Les deux suivantes montrent que l'on coupe la bissectice, et que l'on a donc un point fixe. ■

Chapitre 4

Annexe

4.1 La fonction u_0

On note $L^+u = -\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial u}{\partial x_j}$.
Les hypothèses sur les coefficients sont celles des chapitres précédent.
Pour vérifier la condition de Dirichlet «raffinée», une foncion u ne devra s'annuler qu'en certains points de la frontière. Ce sont les points définis ci-dessous :

Définition 10 *Le point y de $\partial\Omega$ admet* ***une barrière forte*** *si pour une certaine boule $B_r(y) = \{|x-y| < r\}$ il existe dans $B_r(y) \cap \Omega = U$ une fonction strictement positive $h \in W^{2,n}_{loc}(U)$ satisfaisant $L^+h \geq 1$ et pouvant être prolongée par continuité au point y par $h(y)$ =0.*

K. Miller [M] a montré que la condition de cône extérieure en y est suffisante pour que ce point y admette une barrière forte. ([BNV]p 63)

Théorème 10 *(Construction de u_0) : il existe u_0 satisfaisant $L^+u_0 = 1$ sur Ω et pouvant être prolongée par 0 en tout point de $\partial\Omega$ admettant une barrière forte. La fonction u_0 est strictement positive.*

H. Berestycki, L.Niremberg et S.R.S. Varadhan, dans [BNV](p. 61 à 64), démontrent ce théorème de la façon suivante : u_0 est construite à partir d'une suite de solutions du problème de Dirichlet défini sur des ouverts réguliers formant une suite Ω_j croissante vers Ω ; si J est un compact de Ω, la suite converge faiblement dans $W^{2,p}(J)$, et fortement dans $C^1(J)$. La fonction u_0 ainsi obtenue est indépendante du choix de la suite d'ouverts.

Exemple : Soit Ω la boule unité dans $\mathbb{R}^3$ privée de l'origine. Prenons l'opérateur $L = L^+ = -\Delta$. Il est clair que l'origine n'admet pas de condition de cône extérieur.

La fonction u_0 est la fonction qui à x de Ω associe $u_0(x) = \frac{1}{6}\left(1-|x|^2\right)$. Cette fonction s'annulle sur la sphère unité, mais pas à l'origine. La propriété $u \overset{u_0}{=} 0$ sur $\partial\Omega$ signifie que u s'annulle sur la sphère unité ; on ne se préoccupe pas de la valeur de u à l'origine.(d'après l'exemple de la page 54[BNV])
Par contre si on prend comme domaine la boule unité dans son entier, on retrouve la condition de Dirichlet classique.

4.2 Théorèmes concernant la fonction principale

Pour le problème de Dirichlet classique, les coefficients de L étant continus et le domaine régulier, on connait la propriété :

$$\lambda_1 = \sup_{0<\Phi\in W^{2,N}_{loc}(\Omega)} \inf_{\Omega} \left(\frac{L\Phi}{\Phi}\right).$$

C'est cette propriété qu'ont utilisé [BNV] pour définir la valeur principale de notre opérateur avec condition de Dirichlet raffinée.
La valeur principale est bien valeur propre. Nous disposons pour ce résultat de deux démonstrations, l'une de Berestycki, Niremberg, Varadhan [BNV], théorème 2.1 p 57 et l'autre de Birindelli [Bi] p 459

Théorème 11 ***Existence de la fonction propre principale***
(i) Il existe une fonction strictement positive ϕ_1 dans $W^{2,p}_{loc}(\Omega)$, $\forall p<\infty$appellée fonction propre principale, vérifiant : $L\phi_1 = \lambda_1\phi_1$
(ii) Si on normalise ϕ_1 par $\phi_1(x_0) = 1$ pour un x_0 fixé dans Ω, alors $\phi_1 \leq k$ où k est une constante dépendant seulement de x_0, Ω,c_0, C_0 et b
(iii) ϕ_1 est majorée par une constante multipliée par la fonction u_0 : $\phi_1 \leq Bu_0$, ([BNV] p 57, théorème 2.1).

Remarque : Le (iii) implique que $\phi_1 \overset{u_0}{=} 0$ sur $\partial\Omega$
La démonstration de ce théorème s'applique aussi aux opérateurs associés à un poids continu positif. Ce résultat existe aussi pour les poids qui changent de signe [FHT]

4.3 Théorèmes liés au signe de λ_1

Il est habituel de lier le principe du maximum au signe de la valeur principale. Nous retrouvons cette situation avec la condition de Dirichlet «raffinée».

Corollaire 2 *Supposons qu'il existe $u > 0$ avec $Lu \geq 0$ sur Ω. Alors :*
soit $\lambda_1 > 0$
soit $\lambda_1 = 0$ et $u = k\phi_1$ où k est une constante. ([BNV] p 58 corollaire 2.1)

Théorème 12 *Le principe du maximum raffiné est vérifié si et seulement si $\lambda_1 > 0$([BNV] théorème 1.1 p 55)*

Lemme 5 *Si $a_0 \geq 0$ alors le principe du maximum raffiné est vérifié.*

Pour $a_0 \geq 0, a_0 \not\equiv 0$, ce lemme provient du corollaire 2 et du théorème 12 en les appliquant à la fonction $u \equiv 1$; pour $a_0 \equiv 0$ le résultat est démontré par [BNV] (Lemme 3.2 p 64)

Théorème 13 *Supposons $\lambda_1 > 0$. Pour tout $f \in L^N(\Omega)$, il existe une et une seule solution u, avec $|u|$ bornée de* $\left\{ \begin{array}{ll} Lu = f & \textit{sur } \Omega \\ u \overset{u_0}{=} 0 & \textit{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$
De plus, il existe une constante A dépendant uniquement de c_0, C_0,, b, Ω, et λ_1 telle que :

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq A \|f\|_{L^N(\Omega)}$$

([BNV] théorème 1.2 p 55)

4.4 L'équation $Lu = \lambda u + f$

4.4.1 L'opérateur solution

L'opérateur L est de la même forme que précédemment. Nous supposons ici, de plus, que $a_0 \geq 0$. D'après le lemme 5 le principe du maximum est vérifié et $\lambda_1 > 0$. Considérons l'équation $Lu = f$.
D'après le théorème 13, nous pouvons définir l'opérateur solution, T, de $L^N(\Omega)$ dans $L^N(\Omega)$, qui associe à tout élément f de $L^N(\Omega)$ l'unique $u \in L^N(\Omega)$, bornée, telle que

$$\left\{ \begin{array}{ll} Lu = f & \text{sur } \Omega \\ u \overset{u_0}{=} 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

([Bi] p 451) En fait $u \in W^{2,N}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$
Le principe du maximum raffiné étant vérifié, T est un opérateur positif. Notons T^* l'opérateur conjugué de T.
Birindelli, [Bi], démontre la proposition suivante

Proposition 6 *l'opérateur T est compact. Il existe une valeur propre positive ρ_1 de T et T^* associée à des fonctions propres positives, $\phi_1 \in L^N(\Omega)$ et $\psi_1 \in L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)$*

Remarque : cette proposition est une preuve différente de l'existence de λ_1 comme valeur propre.

La compacité de T permet d'aboutir au résultat suivant sur le spectre de L :

Proposition 7 *Le spectre de L ne contient que des valeurs propres isolées, sans point d'accumulation. (Birindelli [Bi] théorème 1.2)*

4.4.2 Principe d'Anti-Maximum

On note Γ le sous-ensemble de $\partial\Omega$ où la frontière est C^2.
Birindelli [Bi] (th 1.3 p 452) nous propose un principe d'antimaximum

Théorème 14 ***Principe d'Anti-Maximum*** *Soit $f \in L^N(\Omega)$ vérifiant*

$$\int_\Omega \Psi_1 f dx > 0$$

où Ψ_1 est la fonction propre positive de T^* ; si de plus on a l'une des hypothèses suivantes :

- *f a son support compact dans Ω*
- *f a son support compact dans $\Omega \cup \Gamma$; $f \in L^p(\Omega)$ pour un $p > N$; on suppose de plus que $a_{ij} \in C(\Omega \cup \partial\Omega)$*

alors il existe un réel $\delta > 0$ tel que pour tout λ de l'intervalle $]\lambda_1, \lambda_1 + \delta[$, il existe une solution unique, bornée $u \in L^N(\Omega)$ au problème $Lu = \lambda u + f$, vérifiant la condition de Dirichlet raffinée. Cette solution est négative sur Ω

L'hypothèse de support compact pour f lorsque la frontière n'est pas régulière ne peut être omise, ainsi que le montre le contre-exemple suivant (Birindelli [Bi] proposition 3.2)

Exemple : Soit Q le carré $(0,\pi) \times (0,\pi)$,et $L = -\Delta$. La valeur propre de L est $\lambda_1 = 2$, associé à la fonction propre : $\phi_1(x;y) = \sin x \sin y$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout λ de l'intervalle $]2; 2+\delta[$, la solution u de $-\Delta u = \lambda u + 1$ change de signe sur Q.
On considère, pour $f \in L^N(\Omega)$ donnée, l'équation $Lu = \lambda u + f$ (E), où l'inconnue u doit vérifier la condition de Dirichlet raffinée, et est bornée.

4.4.3 Equation (E) : $Lu = \lambda u + f$

En appliquant ce qui précède à l'opérateur $L - \lambda$, dont la valeur principale est $\lambda_1 - \lambda$, on arrive à :
• Si $\lambda < \lambda_1$, d'après le théorème 13 appliqué à $L - \lambda$, il existe une solution unique

à l'équation (E). De plus, si $f \geq 0$, alors u est positive.
• Si $\lambda = \lambda_1$, et si f n'est pas identiquement nulle, il n'y a pas de solution, d'après le corollaire 2
• Si $\lambda > \lambda_1$, pour un λ assez proche de λ_1 on dispose du Principe d'Anti-Maximum.

Deuxième partie

Systèmes de Schrödinger sur $\mathbb{R}^N$

Chapitre 5

Résultats sur les systèmes de Schrödinger $\mathbb{R}^N$

5.1 Introduction

Dans cette partie, le domaine est $\mathbb{R}^N$. On considère des opérateurs de la forme

$$L_q = -\Delta + q,$$

définis sur $L^2(\mathbb{R}^N)$, où q est un potentiel défini de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$, continu et positif.

On cherche ici à étudier des systèmes de deux équations de Schrödinger de la forme suivante :

$$(SSch) \quad \left\{ \begin{array}{lcll} -\Delta u_1 + q_1(x)u_1 & = & \lambda u_1 + a(x)\,u_1 + b(x)\,u_2 + f(x) & \text{in } L^2(\mathbb{R}^N) \\ -\Delta u_2 + q_2(x)u_2 & = & \lambda u_2 + c(x)\,u_1 + d(x)\,u_2 + g(x) & \text{in } L^2(\mathbb{R}^N) \end{array} \right.$$

On note $\mathcal{L} = diag(L_q)$ et M la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b c et d sont des fonctions. Aucune hypothèse n'est faite pour le moment sur le signe de b et c car on étudie ici aussi bien des systèmes coopératifs que des systèmes non coopératifs. Nous étudierons de façon complète le cas $q_1 = q_2$ et a, b, c et d constantes ; puis nous regarderons aussi quelques cas avec des coefficients variables, ainsi que $q_2 \neq q_1$, mais suffisamment proche de q_1.
Soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$

Le système considéré s'écrit

$$(SSch) \qquad \mathcal{L}U = \lambda U + MU + F$$

Le but est de donner des résultats de positivité fondamentale des solutions u_1 et−ou u_2, des résultats de négativité fondamentale de u_1 et−ou u_2 suivant la valeur du paramètre réel λ.

Dans la section 2, après avoir donné les définitions utiles au problème, on rappelle sous quelles hypothèses il est possible d'obtenir des résultats de positivité et de négativité fondamentale pour une équation. Enfin, dans la section 3, on présente les résultats obtenus pour les systèmes, et plus particulièrement à la comparaison des solutions à l'état fondamental.

5.2 Définitions et rappels pour une équation

5.2.1 L'opérateur étudié

On considère sur $L^2(\mathbb{R}^N)$ l'opérateur de Schrodinger :

$$L_q := -\Delta + q(x).$$

où le potentiel $q \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ est continu, satisfait $0 < const \leq q(x)$, et tend vers l'infini quand $|x| \to \infty$.

Les notations et rappels de ce paragraphe sont ceux de Fleckinger ([F2]).

On note

$$V_q(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} q(x)|u|^2 dx < \infty \right\}.$$

Cet ensemble est muni de la norme définie par : $\|u\|_q^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} q(x)|u|^2 dx$.
Il s'injecte dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, de façon compacte.
On note $\mathcal{D}(L_q)$ le domaine de L_q considéré au sens fort :
$\mathcal{D}(L_q) = \{u \in V_q(\mathbb{R}^N),\ L_q u \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$. L'injection de $\mathcal{D}(L_q)$ dans $V_q(\mathbb{R}^N)$ est continue d'image dense.

Le résultat suivant est classique (voir en particulier [EE] , [F1] et [F2])

Proposition 8 *L'opérateur L_q admet une unique réalisation positive autoadjointe sur $L^2(\mathbb{R}^N)$.*
Il est inversible, et son inverse noté L_q^{-1} est autoadjoint, compact dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, d'image $\mathcal{D}(L_q)$.
L'opérateur L_q admet donc un spectre discret constitué d'une suite croissante de valeurs propres strictement positives $\lambda_k(q) > 0$, chacune de multiplicité finie.

La plus petite valeur propre $\lambda_1(q)$ est simple, et est caractérisée par

$$\lambda_1(q) = \inf_{u \in V_q(\mathbb{R}^N)} \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} q(x)|u|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx} \right\}$$

On associe à cette valeur propre principale une fonction propre $\varphi_1 > 0$ sur $\mathbb{R}^N$, normalisée par $\|\varphi_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 1$. Cette fonction décroit exponentiellement au voisinage de l'infini. Cette fonction est appelée «état fondamental» en physique.

On définit à partir de la fonction principale l'ensemble :

$$X = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) : \frac{u}{\varphi_1} \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \right\}$$

Cet ensemble muni de la norme

$$\|u\|_X = \inf \left\{ C \in \mathbb{R} : |u| \leq C\varphi_1 \text{ presque partout dans } \mathbb{R}^N \right\}$$

est un espace de Banach.

Le principe du maximum pour cet opérateur est un résultat classique, qui peut s'obtenir par la théorie des semi-groupes (voir par exemple : Reed et Simon [RS]). Plus précisément, on a l'amélioration de la positivité :

Théorème 15 ***Amélioration de la positivité***
On suppose que le potentiel q est une fonction localement essentiellement bornée, qui vérifie :

$$0 < const \leq q(x), \text{ avec } \lim_{|x| \to +\infty} q(x) = +\infty.$$

La fonction f appartient à $L^2(\mathbb{R}^N)$. Soit λ un paramètre réel, et u une fonction du domaine de L_q telle que

$$L_q u(x) = -\Delta u(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x) + f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Alors, si $\lambda < \lambda_1$, on a

$$f \geq 0, f \not\equiv 0 \implies u > 0 \text{ dans } \mathbb{R}^N$$

5.2.2 Positivité et négativité fondamentale

Pour ce type d'opérateur, les principes de maximum et d'anti-maximum généralisés ont été établis par Alziary, Takáč [AT1], Alziary, Fleckinger et Takáč [AFT1],

Alziary et Takáč [AT2].
Les hypothèses sur le potentiel -qui sont indiquées un peu plus loin-, utilisées pour obtenir des principes de maximum et d'anti-maximum, proviennent de ces articles. Il s'agit de potentiel radial, ou représentant une petite pertubation d'un potentiel radial.

On utilise ici des définitions et des résultats de Alziary et Takáč [AT1] et [AT2]. Les notions de fonction *«fondamentalement positive»* et *«fondamentalement négative»* qui font référence à l'état fondamental :

Définition 11 *Une fonction $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ est dite fondamentalement positive ou φ_1-positive s'il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$u \geq c\varphi_1 \text{ presque partout dans } \mathbb{R}^N$$

De même, une fonction $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ est dite fondamentalement négative ou φ_1-négative s'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$u \leq -c\varphi_1 \text{ presque partout dans } \mathbb{R}^N$$

5.2.3 Les hypothèses sur le potentiel

L'hypothèse : «le potentiel q tend vers l'infini quand $|x| \to \infty$» ne permet pas d'obtenir des comparaisons à l'état fondamental. Le potentiel doit avoir une vitesse de croissance suffisante ; en particulier, il n'y a pas de positivité fondamentale pour $q(x) = k^2|x|^2$ où k est une consante réelle. ([AT1] p 281 [AT2] p 36).

On précise ici les hypothèses utilisées, qui sont celles de Alziary et Takáč [AT2]. Le potentiel représente une petite perturbation d'un potentiel à symétrie radiale. Pour définir les hypothèses sur le potentiel, on définit une classe $\mathcal{C}_Q$ de fonctions :

Classe $\mathcal{C}_Q$: ensemble des fonctions Q telles que $Q : \mathbb{R}_+ \to (0, \infty)$ est continue croissante sur un intervalle $[r_0, \infty)$, $0 < r_0 < \infty$, et vérifie

$$\int_{r_0}^{\infty} Q(r)^{-1/2} \, \mathrm{d}r < \infty.$$

En conséquence, $\lim_{r\to\infty} Q(r) = \infty$ et $Q'(r) \geq 0$ presque partout pour $r \geq r_0$.

Remarque : C'est la condition sur l'intégrale qui permet de garantir une croissance supérieure à x^2 pour le potentiel q. L'hypothèse de monotonie est une hypothèse technique, qui peut être remplacée par d'autres conditions. [AFT1] [AFT2]

Le potentiel q sera supposé vérifier l'hypothèse :
Hypothèse (H_q) : $\diamond$ Il existe deux fonctions Q_1 et Q_2 de classe $\mathcal{C}_Q$ et deux constantes strictement positives $C_{12}, r_0 \in (0, \infty)$, telles que

$$Q_1(|x|) \leq q(x) \leq Q_2(|x|) \leq C_{12}\, Q_1(|x|) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N\,,$$

et telles que :

$$\int_{r_0}^{\infty} (Q_2(s) - Q_1(s)) \int_{r_0}^{s} \exp\Big(- \int_r^s [Q_1(t)^{1/2} + Q_2(t)^{1/2}]\, \mathrm{d}t \Big)\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}s < \infty\,.$$

Remarque : Cette dernière condition signifie que q est proche d'une fonction radiale Q_1, et garantie que l'espace X associé à Q_1 et à Q_2 est le même que l'espace X associé à q. En conséquence, l'ensemble X est le même lorsque le potentiel q est remplacé par un potentiel $q - c$, avec c constante réelle. De même, X ne change pas si q est remplacé par $q - f$ où f est une fonction bornée.

5.2.4 Résultats sur la positivité fondamentale

Les résultats qui suivent donnent une comparaison entre u solution de l'équation $L_q u = \lambda u + f$, et l'état fondamental φ_1.

Pour un potentiel vérifiant les hypothèses (H_q), on dispose du résultat de Alziary et Takáč :

Théorème 16 *([AT2] théorème 3.1 p 41) On suppose l'hypothèse (H_q) vérifiée. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, telle que $f \geq 0$ presque partout sur $\mathbb{R}^N$, et $f \not\equiv 0$.*
Soit λ un réel. On suppose $\lambda < \lambda_1$. Alors il existe une solution unique u à l'équation $L_q u = \lambda u + f$, et cette solution est fondamentalement positive.
Plus précisément, si on note $\mathcal{K}|_X$ la restriction de $\mathcal{K} = (L_q - \lambda I)^{-1}$ à l'espace de Banach X, l'opérateur $\mathcal{K}|_X$ est borné, linéaire sur X ; sa norme d'opérateur est inférieure à $\dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda}$. ([AT2] p 41)

Proposition 9 *Comportement de la constante : on a $u \geq c\varphi_1$, où c tend vers l'infini quand λ tend vers λ_1.*

Ce résultat est obtenu au cours de la démonstration.

5.2.5 Résultats sur la négativité fondamentale

La négativité fondamentale a été montrée d'abord pour un potentiel radial par Alziary, Fleckinger, Takáč, [AFT2]. Dans ce cas, l'état fondamental φ_1 est à symétrie radiale. On utilise ici l'énoncé donné dans [AT2], pour un potentiel proche du radial.

Théorème 17 *([AT2] théorème 3.4 p 42) On suppose les hypothèses (H_q) vérifiées. Soit f dans X, telle que $\int_{\mathbb{R}^N} f\varphi_1 dx > 0$. Alors il existe un réel strictement positif δ, dépendant de f tel que, pour tout $\lambda \in (\lambda_1; \lambda_1 + \delta)$, la solution u de $L_q u = \lambda u + f$ est fondamentalement négative.*
Plus précisément, on a $u \leq -c\varphi_1$ où c est une constante positive dépendant de f.

5.3 Nouveaux résultats sur les systèmes

5.3.1 Coefficients constants

On considère ici le système 2×2 :

$$(SSch) \qquad \mathcal{L}U = \lambda U + MU + F$$

avec les hypothèses suivantes
Hypothèse $(H_{\mathcal{L}})$: $\diamond$ le potentiel q sera le même pour les deux équations. Ce potentiel q vérifie les hypothèses (H_q) énoncées précédemment.
Hypothèse (H_F) : $\diamond$ f et g sont dans X.
Hypothèses (H_M) : Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où les coefficients sont constants.
$\diamond$ Sans nuire à la généralité du résultat, on peut supposer $a > 0$, $d > 0$, ce qui peut être vérifié en additionnant de chaque côté une constante multipliée par $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$.
$\diamond$ On suppose $a \geq d$ (ce qui donne simplement l'ordre d'écriture des équations) avec $c \neq 0$.
$\diamond$ On suppose $D = (a-d)^2 + 4bc > 0$
L'hypothèse $D = (a-d)^2 + 4bc > 0$ donne que M est diagonalisable, les deux valeurs propres étant distinctes. On note ν^+ la plus grande valeur propre et ν^- l'autre valeur propre.

Théorème 18 *On suppose que les hypothèses $(H_{\mathcal{L}})$, (H_F) et (H_M) sont vérifiées. On suppose de plus que $f + \dfrac{2b}{a-d+\sqrt{D}} g \geq 0$ p.p.*
Alors si u_1 et u_2 sont les solutions du système, on a

Condition sur λ	*Condition sur* M	*Conclusion*
$\lambda_1 - \nu^+ - \delta < \lambda < \lambda_1 - \nu^+$ *où* $\delta > 0$ *dépend de* f, g *et* M	$c > 0$	u_1 *et* u_2 *sont fondamentalement positives.*
$\lambda_1 - \nu^+ - \delta < \lambda < \lambda_1 - \nu^+$ *où* $\delta > 0$ *dépend de* f, g *et* M	$c < 0$	u_1 *est fondamentalement positive et* u_2 *fondamentalement négative*
$\lambda_1 - \nu^+ < \lambda < \lambda_1 - \nu^+ + \delta$ *où* $\delta > 0$ *dépend de* f, g *et* M	$c > 0$	u_1 *et* u_2 *sont fondamentalement négatives.*
$\lambda_1 - \nu^+ < \lambda < \lambda_1 - \nu^+ + \delta$ *où* $\delta > 0$ *dépend de* f, g *et* M	$c < 0$	u_1 *est fondamentalement négative et* u_2 *fondamentalement positive*

Remarque : Au cours de la démonstration, on montre qu'on peut choisir v^+, vecteur propre associé à ν^+ tel que sa première coordonnée est strictement positive, ce qui permet d'orienter la droite vectorielle engendrée par v^+. On note v^- un vecteur propre associé à ν^-. La conditon $f + \dfrac{2b}{a-d+\sqrt{D}} g \geq 0$ *p.p.* signifie que la projection du vecteur F sur v^+ parallèlement à v^- est de même sens que v^+.

Dans le cas particulier $c = 0$, en utilisant la même technique, on obtient un second résultat autorisant deux potentiels différents. On étudie le système :

$$(S'Sch) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u_1 + q_1(x) u_1 & = & \lambda u_1 + a\, u_1 + b\, u_2 + f \\ -\Delta u_2 + q_2(x) u_2 & = & \lambda u_2 + d\, u_2 + g \end{array} \right.$$

Plus précisément, la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifie l'hypothèse suivante :

Hypothèses (H'_M) **:**

◇ On suppose toujours $a > 0$, $d > 0$.
◇ On suppose $a > d$ et $c = 0$.

Les valeurs propres de M sont alors a et d, l'hypothèse $a > d$ permet de s'assurer que M possède deux valeurs propres distinctes.

Les deux équations peuvent comporter deux potentiels distincts, lorsqu'ils vérifient :

Hypothèses $(H'_{\mathcal{L}})$

Les potentiels q_1 et q_2 vérifient les hypothèses (H_q) avec les mêmes fonctions auxilaires. En conséquence, l'ensemble X est le même pour q_1 et pour q_2.

Théorème 19 *On suppose que les hypothèses* $(H'_{\mathcal{L}})$, (H_F) *et* (H'_M) *sont vérifiées. On suppose de plus que* $g \geq 0$ *et* $f - \dfrac{b}{a-d} g \geq 0$ *p.p. et que* $\lambda_1(q_1) - a < \lambda_1(q_2) - d$. *Soit le système*

$$(S'Sch) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u_1 + q_1(x) u_1 & = & \lambda u_1 + a\, u_1 + b\, u_2 + f \\ -\Delta u_2 + q_2(x) u_2 & = & \lambda u_2 + d\, u_2 + g \end{array} \right.$$

Alors
– Il existe un réel $\delta > 0$ *dépendant de* f, g *et* M *tel que si* $\lambda_1(q_1) - a - \delta < \lambda < \lambda_1(q_1) - a$, *alors* u_1 *et* u_2 *sont fondamentalement positives*
– Il existe un réel $\delta' > 0$ *dépendant de* f, g *et* M *tel que si* $\lambda_1(q_1) - a < \lambda < \lambda_1(q_1) - a + \delta'$ *alors* u_1 *est fondamentalement négative et* u_2 *est fondamentalement postive.*

5.3.2 Coefficients variables

Ici on s'intéresse au système

$$(SSch) \qquad \mathcal{L}U = \lambda U + MU + F$$

où la matrice M a ses coefficients variables :

$$M = \left(\begin{array}{cc} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{array} \right)$$

Ce résultat généralise le premier résultat : coefficients constants avec $c \neq 0$. Il suppose donc, comme le premier résultat, que les deux équations aient le même potentiel : l'hypothèse $(H_{\mathcal{L}})$ est supposée vérifiée.

La méthode de découplage employée ne peut être utilisée que si la forme de la matrice permet d'obtenir des vecteurs propres aux coordonnées constantes. Cosner et Schaefer [CS] ont montré qu'il y a deux formes de matrices qui conviennent :
- les matrices dont les composantes non diagonales sont proportionnelless à $a - d$
- les matrices dont les composantes diagonales sont égales, et dont les composantes b et c sont proportionnelles entre elles, et de même signe.

On reprend ici ces deux formes, que l'on étudie

Cas où les fonctions b et c sont proportionnelles à $a - d$
Hypothèses (H_{Mv}) :
◇ On suppose que pour tout x, on a $a(x) \geq 0$, $d(x) \geq 0$, de plus $a(x) - d(x) \geq 0$, $a - d \not\equiv 0$.
◇ On suppose que les fonctions a et d sont dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$

◇ On suppose qu'il existe deux réels b^* et $c^* \neq 0$ tels que $b(x) = b^*(a(x) - d(x))$ et $c(x) = c^*(a(x) - d(x))$
◇ Soit $D^* = 1 + 4b^*c^*$; on suppose $D^* > 0$

Remarque : Cette dernière hypothèse permet de s'assurer que $M(x)$ est diagonalisable. On note $\nu^+(x)$ et $\nu^-(x)$ les deux valeurs propres distinctes de $M(x)$. Les hypothèses sur $a - d$ permettent de s'assurer que l'une des valeurs propres est toujours strictement supérieure à l'autre. On note $\nu^+(x)$ la plus grande.
On note $\lambda_1(q - \nu^+)$ la valeur propre principale de $-\Delta + (q - \nu^+)$ sur $\mathbb{R}^N$, de même $\lambda_1(q - \nu^-)$. Puisque $\nu^+(x) > \nu^-(x)$, on a $\lambda_1(q - \nu^+) < \lambda_1(q - \nu^-)$.

Théorème 20 *On suppose que les hypothèses $(H_{\mathcal{L}})$, (H_F) et (H_{Mv}) sont vérifiées. On suppose de plus que $f + \dfrac{2b^*}{1 + \sqrt{D^*}} g \geq 0$ p.p. Alors si u_1 et u_2 sont les solutions du système, on a*

Condition sur λ	*Condition sur M*	*Conclusion*
$\lambda_1(q - \nu^+) - \delta < \lambda < \lambda_1(q - \nu^+)$ *où $\delta > 0$ dépend de f, g et M*	$c > 0$	*u_1 et u_2 sont fondamentalement positives.*
$\lambda_1(q - \nu^+) - \delta < \lambda < \lambda_1(q - \nu^+)$ *où $\delta > 0$ dépend de f, g et M*	$c < 0$	*u_1 est fondamentalement positive et u_2 fondamentalement négative*
$\lambda_1(q - \nu^+) < \lambda < \lambda_1(q - \nu^+) + \delta$ *où $\delta > 0$ dépend de f, g et M*	$c > 0$	*u_1 et u_2 sont fondamentalement négatives.*
$\lambda_1(q - \nu^+) < \lambda < \lambda_1(q - \nu^+) + \delta$ *où $\delta > 0$ dépend de f, g et M*	$c < 0$	*u_1 est fondamentalement négative et u_2 fondamentalement positive*

Cas où $a = d$, les fonctions b et c sont proportionnelles entre elles, et de même signe

Hypothèses (H'_{Mv}) :
◇ On suppose que pour tout x, on a $a(x) \geq 0$.
◇ On suppose que la fonction a est dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$
◇ On suppose qu'il existe deux réels b^* et $c^* \neq 0$ tels que $b(x) = \epsilon b^* r(x)$ et $c(x) = \epsilon c^* r(x)$ avec b^*, c^* réels strictement positifs et $\epsilon = \pm 1$.
◇ De plus, la fonction r est dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, et $r(x) > 0$ pour tout x.

Ici aussi, les hypothèses sur la forme de b et c permettent de diagonaliser la matrice $M(x)$, l'une des valeurs propres, notée $\nu^+(x)$ étant toujours supérieure à l'autre valeur propre $\nu^-(x)$, ce qui permet d'avoir $\lambda_1(q - \nu^+) < \lambda_1(q - \nu^-)$.

Théorème 21 *On suppose que les hypothèses* $(H_{\mathcal{L}})$, (H_F) *et* (H'_{Mv}) *sont vérifiées. On suppose de plus que* $\sqrt{c^*}f + \epsilon\sqrt{b^*}g \geq 0$
Alors si u_1 *et* u_2 *sont les solutions du système, on a*

Condition sur λ	*Condition sur M*	*Conclusion*
$\lambda_1(q-\nu^+) - \delta < \lambda < \lambda_1(q-\nu^+)$ *où* $\delta > 0$ *dépend de* f, g *et* M	$c > 0$	u_1 *et* u_2 *sont fondamentalement positives.*
$\lambda_1(q-\nu^+) - \delta < \lambda < \lambda_1(q-\nu^+)$ *où* $\delta > 0$ *dépend de* f, g *et* M	$c < 0$	u_1 *est fondamentalement positive et* u_2 *fondamentalement négative*
$\lambda_1(q-\nu^+) < \lambda < \lambda_1(q-\nu^+) + \delta$ *où* $\delta > 0$ *dépend de* f, g *et* M	$c > 0$	u_1 *et* u_2 *sont fondamentalement négatives.*
$\lambda_1(q-\nu^+) < \lambda < \lambda_1(q-\nu^+) + -\delta$ *où* $\delta > 0$ *dépend de* f, g *et* M	$c < 0$	u_1 *est fondamentalement négative et* u_2 *fondamentalement positive*

Remarque : Dans tous les autres systèmes, l'ordre des équations était donné par la condition $a > d$. Ici dans le cas $\epsilon = 1$, les deux solutions sont soit fondamentalement positives soit fondamentalement négatives simultanément. Dans le cas $\epsilon = -1$, la condition $\sqrt{c^*}f + \epsilon\sqrt{b^*}g \geq 0$ revient simplement à fixer l'ordre des équations.

Chapitre 6

Comparaison des résultats avec les résultats existants

Dans le cas d'un domaine borné régulier, l'existence et la positivité de solutions pour un système coopératif d'équations est un résultat bien connu ; une référence importante est Protter et Weinberger [PW].
Pour les opérateurs de Schrödinger sur $\mathbb{R}^N$, présentés au chapitre précédent, il existe différents résultats de positivité, de négativité. Dans ce chapitre on présente des résultats déjà connus pour des systèmes, non nécessairement coopératifs, en soulignant les différences et les améliorations de notre résultat.

6.1 Principe du maximum pour des systèmes coopératifs

Cardoulis [C] en utilisant des méthodes variationnelles, la positivité forte pour une équation et des résultats sur les matrices, a montré un principe du maximum pour un système $n \times n$.
On considère n potentiels q_i, on note $\mathcal{L}$ la matrice diagonale des opérateurs $-\Delta+q_i$, $F = (f_i)_{i=1,n}$ et M la matrice à coefficients constants $M = (m_{i,j})_{i,j}$.
On s'intéresse au système

$$(SS_1) \qquad \mathcal{L}U = MU + F$$

où $U = (u_i)_{i=1,n}$

Les hypothèses sur les potentiels sont les suivantes : pour tout i,le potentiel q_i est continu sur $\mathbb{R}^N$, supérieur à 1, et tend vers $+\infty$ quand $|x|$ tend vers $+\infty$.

On note $\varphi_1(q_i)$ l'état fondamental associé à la valeur principale $\lambda_1(q_i)$ de l'opérateur $-\Delta + q_i$. On note Λ la matrice diagonale des valeurs principales $\lambda_1(q_i)$.

Théorème 22 *([C] théorème 3.1.2 p 54)*
On suppose que :

- ⋄ *les potentiels q_i sont continus sur $\mathbb{R}^N$, supérieurs à 1, et tendent vers $+\infty$ quand $|x|$ tend vers $+\infty$.*
- ⋄ *les fonctions f_i sont dans $L^2(\mathbb{R}^N)$*
- ⋄ *la matrice M est coopérative*
- ⋄ *la matrice $\Lambda - M$ est une $M-$matrice non singulière*

Alors le système (SS_1) vérifie le principe du maximum :

$$\text{si } F \geq 0, \text{ alors } U \geq 0$$

La condition sur M n'est pas nécessaire et suffisante pour obtenir le principe du maximum, sauf si tous les potentiels sont égaux. Il n'y a pas de comparaison à l'état fondamental.

6.2 Positivité fondamentale pour des systèmes.

6.2.1 Systèmes coopératifs, et potentiels distincts

L'article d'Alziary, Fleckinger, Takáč [AFT2] donne la comparaison à l'état fondamental. Le premier résultat concerne des systèmes $n \times n$ coopératifs, et a permitoujours de la forme :

$$(SS_1) \qquad \mathcal{L}U = MU + F$$

Hypothèses sur les potentiels : Les hypothèses sur les potentiels sont plus fortes. Elles utilisent une classe $\mathcal{C}'_Q$ de fonctions auxiliaires Q, définies sur $\mathbb{R}^+$:
Classe $\mathcal{C}'_Q$:
Il existe r_0 tel que pour tout $r \geq r_0$, $Q(r) > 0$, Q est localement absolument continue, $Q'(r) \geq 0$, et il existe $\beta \in (0; \frac{1}{2})$ tel que $\int_{r_0}^{\infty} Q(r)^{-\beta} dr < \infty$.

Hypothèse (H'_q)
⋄ Le potentiel q s'écrit comme somme :

$$q(x) = q'(|x|) + q''(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^N$$

de deux fonctions q' et q'' mesurables, et vérifiant les propriétés suivantes, où Q est une fonction auxiliaire de classe $\mathcal{C}'_Q$:
Propriété de q' : La fonction $q' \ : \ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est localement essentiellement bornée, $q'(r) \geq$ const > 0 pour tout $r \geq 0$ et il existe une constante $c_1 > 0$ telle que

$$c_1 Q(r) \leq q'(r) \text{ pour } r_0 \leq r < \infty$$

Propriété de q'' :
La fonction $q''\ :\ \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est localement essentiellement bornée, telle que $q(x) = q'(|x|) + q''(x) \geq \text{const} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et il existe une constante $c_2 > 0$ telle que

$$|q''(x)| \leq c_2 Q\left(|x|\right)^{\frac{1}{2}-\beta} \ \text{ pour } x \in \mathbb{R}^N$$

Théorème 23 *([AFT2], théorème 4.1 p 19)*
On suppose que :

- ◇ *les potentiels q_i, continus, vérifient l'hypothèse (H'_q) ;*
- ◇ *il existe une constante K, $0 < K < 1$ telle que $q_1 - q_i < Kq_1$*
- ◇ *les fonctions f_i sont dans $L^2(\mathbb{R}^N)$*
- ◇ *la matrice $\Lambda - M$ est une $M-$matrice non singulière*

Alors il existe une constante $c > 0$ telle que $u_i \geq c\varphi_1(q_i)$ pour toute composante u_i de solution U du système (S_C3).

Dans tous ces articles, on utilse des méthodes variationnelles, mais on ne détermine pas la valeur principale du système. Cela ne permet pas d'aller au-delà de la positivité fondamentale.

6.2.2 Systèmes 2×2 non coopératifs, même potentiel

On s'intéresse au cas d'un système 2×2, avec les deux potentiels égaux, $q_1 = q_2 = q$, de la forme :

$$(SS_2) \qquad \begin{cases} -\Delta u_1 + qu_1 = au_1 + bu_2 + f \\ -\Delta u_2 + qu_2 = cu_1 + du_2 + g \end{cases}$$

La technique utilisée est celle de de Figuerido, Mitidieri [FM]. En insérant ce système dans un système 3×3 bien choisi, et en appliquant le résultat précédent, Alziary, Fleckinger, Takáč [AFT2] donnent dans le cas $b < 0$, donc d'un système non coopératif, le résultat de positivité fondamentale :

Théorème 24 *([AFT2], théorème 4.2 p 19)*
On suppose que :

- ◇ *les coefficients : $b < 0$, $c > 0$ $a > d$ et $D = (a-d)^2 + 4bc \geq 0$*
- ◇ *le potentiel q, vérifie les hypothèses $(H'1_q)$ et $(H''1_q)$*
- ◇ *la valeur principale $\lambda_1(q) > a$ et $\lambda_1(q) > d$*
- ◇ *les fonctions f et g sont dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, $f \geq 0$ et $g \geq 0$, f ou $g \neq 0$*
- ◇ *on suppose $f - \dfrac{a-d+\sqrt{D}}{2c} g \geq 0$*

Alors il existe une constante $C > 0$ telle que $u_1 \geq C\varphi_1(q)$ et $u_2 \geq C\varphi_1(q)$.

Remarque : La condition $f - \dfrac{a-d+\sqrt{D}}{2c}g \geq 0$ apparait comme une condition technique, nécessaire pour plonger le système 2×2 dans le système coopératif 3×3. Notre méthode montre que cette condition correspond au sens de la projection du vecteur F sur le vecteur propre à coordonnées positives de M.

6.3 Négativité fondamentale pour un système coopératif, potentiel radial

Les travaux cités précédemment ne donnent pas de résultat de négativité fondamentale. Dans sa thèse, Besbas [Be] a établi des résultats de φ_1-négativité pour des systèmes 2×2.
Le résultat de négativité fondamentale pour une équation, utilisé dans ce travail n'était pas vérifié pour $f \in X$, mais sur un ensemble plus restreint, noté $X^{\alpha,2}$, où $\dfrac{N-1}{2} < \alpha < \infty$

Définition 12 *Soit* $S^{N-1} = \left\{\omega \in \mathbb{R}^N, |\omega| = 1\right\}$ *et* Δ_S *l'opérateur de Laplace-Beltrami sur* S^{N-1}*.On pose pour tout* x *de* $\mathbb{R}^N$, $r = |x|$ *et* $x' = \dfrac{x}{r}$*. Alors* $X^{\alpha,2}$ *est l'ensemble :*

$$\left\{f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N,\ \exists C > 0, \oint |f(r,x')|^2 d\sigma(x') + \oint \left|\left[(-\Delta_S)^{\frac{\alpha}{2}} f\right](r,x')\right|^2 d\sigma(x') \leq (C\varphi_1)^2 \forall r \in \mathbb{R}^+\right\}$$

La plus petite constante $C > 0$ *définit la norme* $\|f\|_{X^{\alpha,2}}$

Dans le cas particulier où f est radiale, on a l'équivalence : $f \in X^{\alpha,2} \Leftrightarrow f \in X$

Cardoulis a apporté des résultas complémentaires à ceux indiqués ici.

6.3.1 Système de deux équations

On s'intéresse au cas d'un système 2×2, avec les deux potentiels égaux, $q_1 = q_2 = q$.
Le système est de la forme :

$$(SS_3) \qquad \begin{cases} -\Delta u_1 + qu_1 = \lambda u_1 + bu_2 + f \\ -\Delta u_2 + qu_2 = cu_1 + \lambda u_2 + g \end{cases}$$

Les coefficients a, b c et d sont constants.
Le potentiel q vérifie l'hypothèse suivante :
Hypothèse (H_{q-rad})

◇ La fonction q est radiale, $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est continue, positive, $q(|x|) \geq$ const $>$ 0.

◇ De plus, il existe une fonction auxilaire $Q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ et une constante $C_q > 0$, qui vérifient pour tout $r \geq r_0 > 0$:
$Q(r) > 0$, Q est localement absolument continue,
$Q'(r) \geq 0$ et$\int_{r_0}^{+\infty} Q(r)^{-\frac{1}{2}} dr < \infty$ et

$$C_q Q(r) \leq q(r) + \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2}$$

Le résultat de négativité fondamentale est le suivant :

Théorème 25 *(Besbas [Be] théorème 3.3.3 p 32)*
On suppose que :

◇ *le potentiel q vérifie l'hypothèse* (H_{q-rad})

◇ *les coefficients a, b c et d sont des constantes,* $b > 0$, $c > 0$ *(le système est coopératif)*

◇ f *et* g *sont dans* $X^{\alpha,2}$,

◇ $f > 0$, $g > 0$

Soit $\Lambda_1 = \lambda_1(q) - \sqrt{bc}$ *et* $\Phi_1 = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \gamma\varphi_1 \end{pmatrix}$, *avec* $\gamma = \sqrt{\frac{b}{c}}$
Alors il existe un nombre $\delta(f, g, b, c) > 0$ *el que pour tout* $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_1 + \delta)$, *la solution* $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, *du système* (SS_3) *vérifie*

$$U \leq -C\Phi_1$$

où $C = C(f, g, b, c, \lambda)$ *est une constante strictement positive.*

Ce résultat de négativité fondamentale est obtenu par découplage, et en utilisant la norme d'opérateur $\mathcal{K} = (L_q - \lambda I)^{-1}$ On utilise le même type de technique dans le chapitre suivant pour les nouveaux résultats.
Pour un système $n \times n$ dans le cas symétrique, Besbas a pu déterminer la valeur principale.
Pour le nouveau résultat, on utilise des énoncés de positivité ou de négativité fondamentale plus puissant que ceux dont disposait Besbas.

Chapitre 7

Démonstration des résultats

7.1 Principal résultat

Pour cette démonstration, on cherche à mener une étude semblable à celle de Cosner et Schaefer [CS]. Leur article donne le signe de solutions à un système 2×2 d'équations elliptiques, sur un domaine borné régulier, en utilisant les techniques de découplage.
En découplant le système étudié, et en utilisant la décomposition de la résolvante de l'opérateur de Schrödinger, on réussit à mener une étude similaire à celle de Cosner et Schaefer. En effet, pour aborder des problèmes dans un domaine non borné, il faut être capable de contrôler le comportement des solutions à l'infini, ce que permet le résultat de compacité de la résolvante de [AFT2]. En réalisant le découplage sur des systèmes 2×2 d'opérateurs de Schrödinger sur $\mathbb{R}^N$, on aboutit à des résultats donnant la comparaison à l'état fondamental.

On considère un système de deux équations de la forme

$$(SSch) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u_1 + q(x)u_1 & = & \lambda u_1 + a\, u_1 + b\, u_2 + f \\ -\Delta u_2 + q(x)u_2 & = & \lambda u_2 + c\, u_1 + d\, u_2 + g \end{array} \right.$$

système qu'on note aussi :

$$(SSch) \qquad \mathcal{L}U = \lambda U + MU + F$$

où les composantes a b c et d de M sont des constantes.

Les hypothèses (H_q), (H_F) sont supposées vérifiées.

<u>Première partie : découplage du système</u>
Lorsqu'on suppose l'hypothèse (H_M), la condition $D = (a-d)^2 + 4bc > 0$ permet

d'affirmer que M possède deux valeurs propres réelles :

$$\nu^+ = \frac{a+d+\sqrt{D}}{2} \text{ et } \nu^- = \frac{a+d-\sqrt{D}}{2}.$$

La plus grande valeur propre ν^+ est strictement positive.

Remarque : La condition $D > 0$ est toujours vérifiée dans le cas d'une matrice coopérative irréductible.

Soit $v^+ = \begin{pmatrix} \dfrac{a-d+\sqrt{D}}{2} \\ c \end{pmatrix}$ et $v^- = \begin{pmatrix} -b \\ \dfrac{a-d+\sqrt{D}}{2} \end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs v^+ et v^- sont des vecteurs propres de M, associés respectivement aux valeurs propres ν^+ et ν^-. Le vecteur v^+ a sa première composante strictement positive, puisque $a \geq d$ d'après l'hypothèse (H_M) et que $D > 0$.

Soit P la matrice de passage formée par v^+ et v^-. La matrice inverse est

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{D}} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{2b}{a-d+\sqrt{D}} \\ \dfrac{-2c}{a-d+\sqrt{D}} & 1 \end{pmatrix}$$

On note $\begin{pmatrix} \widetilde{u_1} \\ \widetilde{u_2} \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \widetilde{f} \\ \widetilde{g} \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$. Puisque f et g sont dans X, $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$ sont dans X.

Remarque : On a $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \widetilde{f} v^+ + \widetilde{g} v^-$ autrement dit $\widetilde{f}$ est la projection de $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ sur le vecteur propre v^+ parallèlement à v^-. L'hypothèse $f + \dfrac{2b}{a-d+\sqrt{D}} g \geq 0$ *p.p.*, c'est à dire $\widetilde{f} \geq 0$ signifie que cette projection est orientée de la même façon que le vecteur v^+.

Le système s'écrit :

$$\begin{cases} -\Delta \widetilde{u_1} + q \widetilde{u_1} = (\lambda + \nu^+)\, \widetilde{u_1} + \widetilde{f} & (1) \\ -\Delta \widetilde{u_2} + q \widetilde{u_2} = (\lambda + \nu^-)\, \widetilde{u_2} + \widetilde{g} & (2) \end{cases}$$

Une fois déterminés $\widetilde{u_1}$ et $\widetilde{u_2}$, les inconnues u_1 et u_2 peuvent être calculées par les relations :

$$u_1 = \frac{a-d+\sqrt{D}}{2}\widetilde{u_1} - b\widetilde{u_2} \qquad (3)$$

$$u_2 = c\widetilde{u_1} + \frac{a-d+\sqrt{D}}{2}\widetilde{u_2} \qquad (4)$$

Seconde partie : Etude de la positivité ou de la négativité fondamentale des solutions.

On suppose $\lambda < \lambda_1 - \nu^-$. Alors l'équation (2) satisfait à la positivité fondamentale (théorème 16). Puisque les fonctions $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$ sont dans X et pour une certaine constante $C_{\widetilde{g}}$, on a

$$|\widetilde{u_2}| \leq \left(\lambda_1 - \lambda - \nu^-\right)^{-1} C_{\widetilde{g}}\varphi_1$$

Premier cas Lorsque $\lambda < \lambda_1 - \nu^+ < \lambda_1 - \nu^-$, l'équation (1) vérifie la positivité fondamentale (théorème 16), donc on a

$$\widetilde{u_1} \geq C(\lambda, \widetilde{f})\varphi_1$$

où $C(\lambda, \widetilde{f})$ tend vers $+\infty$ quand λ tend vers $\lambda_1 - \nu^+$ d'après la proposition 9.
De plus, on a

$$|\widetilde{u_2}| \leq \left(\lambda_1 - \lambda - \nu^-\right)^{-1} C_{\widetilde{g}}\varphi_1 \leq \left(\nu^+ - \nu^-\right)^{-1} C_{\widetilde{g}}\varphi_1$$

Par conséquent $\widetilde{u_2}$ reste borné, alors que $\widetilde{u_1}$ prend de grandes valeurs quand λ tend vers $\lambda_1 - \nu^+$.
Donc il existe un réel strictement positif δ, qui dépend à fois de f, g et M, tel que, pour tout λ de $(\lambda_1 - \nu^+ - \delta, \lambda_1 - \nu^+)$, on obtient pour u_1 et u_2, en reprenant les équations (3) et (4), $u_1 \geq C_{u_1}\varphi_1$ et $u_2 \geq C_{u_2}\varphi_1$ où C_{u_1} et C_{u_2} sont deux constantes positives.

Second cas Lorsque $\lambda_1 - \nu^+ < \lambda < \lambda_1 - \nu^-$, la relation

$$|\widetilde{u_2}| \leq \left(\lambda_1 - \lambda - \nu^-\right)^{-1} C_{\widetilde{g}}\varphi_1$$

reste vérifiée, et l'équation (1) vérifie le principe de négativité fondamentale (théorème 17). Donc il existe $\delta_{\widetilde{u_1}} \leq \nu^+ - \nu^-$,strictement positif, tel que pour tout $\lambda \in (\lambda_1 - \nu^+, \lambda_1 - \nu^+ + \delta_{\widetilde{u_1}})$, on a :

$$|\widetilde{u_2}| \leq \left(\lambda_1 - \lambda - \nu^-\right)^{-1} C_{\widetilde{g}}\varphi_1 \leq \left(\nu^+ - \nu^- - \delta_{\widetilde{u_1}}\right)^{-1} C_{\widetilde{g}}\varphi_1$$

et $\widetilde{u_1} \leq -C(\lambda, \widetilde{f})\varphi_1$ avec $C(\lambda, \widetilde{f})$ qui tend vers $+\infty$ lorsque λ tend vers $\lambda_1 - \nu^+$.
Par conséquent, $\widetilde{u_2}$ reste bornée, alors que $\widetilde{u_1}$ prend de grandes valeurs négatives,

lorsque λ est assez proche de $\lambda_1 - \nu^+$.
Donc il existe un réel strictement positif δ, qui dépend à fois de f, g et M, tel que, pour tout λ de $(\lambda_1 - \nu^+, \lambda_1 - \nu^+ + \delta)$, on obtient pour u_1 et u_2, dans le cas $c > 0$, en reprenant les équations (3) et (4), $u \leq -C_{u_1}\varphi_1$ et $u_2 \leq -C_{u_2}\varphi_1$ où C_{u_1} et C_{u_2} sont deux constantes positives.
Dans le cas $c < 0$, on obtient $u_1 \leq C_{u_1}\varphi_1$ et $u_2 \geq C_{u_2}\varphi_1$ où C_{u_1} et C_{u_2} sont deux constantes positives. ■

7.2 Le cas particulier $c = 0$

On peut utiliser la même méthode pour le cas $c = 0$.

Les valeurs propres de M sont alors a et d, l'hypothèse $a > d$ permet de s'assurer que M possède deux valeurs propres distinctes.

Ici on a : $v^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v^- = \begin{pmatrix} \frac{b}{a-d} \\ 1 \end{pmatrix}$, vecteurs propres de M, associés respectivement aux valeurs propres a et d. Soit P la matrice de passage formée par v^+ et v^-. La matrice inverse est :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-b}{a-d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note toujours $\begin{pmatrix} \widetilde{u_1} \\ \widetilde{u_2} \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \widetilde{f} \\ \widetilde{g} \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$. Puisque f et g vérifient $g \geq 0$ et $f - \dfrac{b}{a-d}g \geq 0$ *p.p.*, on a $\widetilde{f} \geq 0$ *p.p.* et $\widetilde{g} \geq 0$ *p.p.*

Le système s'écrit :

$$\begin{cases} -\Delta\widetilde{u_1} + q_1\widetilde{u_1} = (\lambda + a)\,\widetilde{u_1} + \widetilde{f} & (1') \\ -\Delta\widetilde{u_2} + q_2\widetilde{u_2} = (\lambda + d)\,\widetilde{u_2} + \widetilde{g} & (2') \end{cases}$$

Et on dispose des relations :

$$u_1 = \widetilde{u_1} + \frac{b}{a-d}\widetilde{u_2} \qquad (3')$$
$$u_2 = \widetilde{u_2} \qquad (4')$$

On suppose $\lambda < \lambda_1(q_2) - d$. Alors l'équation (2') satisfait à la positivité fondamentale du théorème 16. Les fonctions $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$ sont dans X et pour une certaine constante $C_{\widetilde{g}}$, on a

$$|\widetilde{u_2}| \leq (\lambda_1(q_2) - \lambda - d)^{-1}\,C_{\widetilde{g}}\varphi_1.$$

De plus, puisque $\widetilde{g} \geq 0$, on sait que $\widetilde{u_2}$ est fondamentalement positive.

Premier cas Lorsque $\lambda < \lambda_1(q_1) - a < \lambda_1(q_2) - d$, l'équation (1') vérifie la positivité fondamentale du théorème 16, donc on a, d'après la proposition 9,

$$\widetilde{u}_1 \geq C(\lambda, \widetilde{f})\varphi_1$$

où $C(\lambda, \widetilde{f})$ tend vers $+\infty$ quand λ tend vers $\lambda_1(q_1) - a$.
De plus, on a

$$|\widetilde{u_2}| \leq (\lambda_1(q_2) - \lambda - d)^{-1} C_{\widetilde{g}}\varphi_1 \leq (a - d)^{-1} C_{\widetilde{g}}\varphi_1$$

Par conséquent $\widetilde{u_2}$ reste borné, alors que $\widetilde{u}_1$ prend de grandes valeurs quand λ tend vers $\lambda_1(q_1) - a$.
Donc il existe un réel strictement positif δ, qui dépend à fois de f, g et M, tel que, pour tout λ de $(\lambda_1(q_1) - a - \delta, \lambda_1(q_1) - a)$, on obtient pour u_1 et u_2, en reprenant les équations $(3')$ et $(4')$, $u_1 \geq C_{u_1}\varphi_1$ et $u_2 \geq C_{u_2}\varphi_1$ où C_{u_1} et C_{u_2} sont deux constantes positives.

Second cas Lorsque $\lambda_1(q_1) - a < \lambda < \lambda_1(q_2) - d$, la relation

$$|\widetilde{u_2}| \leq (\lambda_1(q_2) - \lambda - d)^{-1} C_{\widetilde{g}}\varphi_1$$

reste vérifiée, et l'équation $(1')$ vérifie le principe de négativité fondamentale (théorème 17). Donc il existe $\delta_{\widetilde{u}_1} \leq a - d$, strictement positif, tel que pour tout $\lambda \in (\lambda_1(q_1) - a, \lambda_1(q_1) - a + \delta_{\widetilde{u}_1})$, on a :

$$|\widetilde{u_2}| \leq (\lambda_1(q_2) - \lambda - d)^{-1} C_{\widetilde{g}}\varphi_1 \leq (a - d - \delta_{\widetilde{u_1}})^{-1} C_{\widetilde{g}}\varphi_1$$

et

$$\widetilde{u}_1 \leq -C(\lambda, \widetilde{f})\varphi_1$$

avec $C(\lambda, \widetilde{f})$ qui tend vers $+\infty$ lorsque λ tend vers $\lambda_1(q_1) - a$.
Par conséquent, $\widetilde{u}_2$ reste bornée, alors que $\widetilde{u}_1$ prend de grandes valeurs négatives, lorsque λ est assez proche de $\lambda_1(q_1) - a$.
Donc il existe un réel strictement positif δ', qui dépend à fois de f, g et M, tel que, pour tout λ de $(\lambda_1(q_1) - a, \lambda_1(q_1) - a + \delta')$, on obtient pour u_1 et u_2, en reprenant les équations (3) et (4), $u_1 \leq -C_{u_1}\varphi_1$ et $u_2 \geq C_{u_2}\varphi_1$ où C_{u_1} et C_{u_2} sont deux constantes positives.■

7.3 Coefficients variables

7.3.1 Première forme : $a \neq d$, les fonctions b et c étant proportionnelles à $a - d$

Les calculs précédents pour diagonaliser M dans le cas général $c \neq 0$ reste valables ; mais on peut écrire D sous la forme $D = (a - d)D^*$. Les valeurs propres s'écrivent alors $\nu^+(x) = \dfrac{a(x)+d(x)+(a(x)-d(x))D^*}{2}$, qui est strictement positive quelquesoit x et $\nu^- = \dfrac{a(x)+d(x)-(a(x)-d(x))D^*}{2} < \nu^+$.

Ici, on peut prendre comme vecteurs propres : $v^+ = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{D^*}}{2} \\ c^* \end{pmatrix}$ et $v^- = \begin{pmatrix} -b^* \\ \dfrac{1+\sqrt{D^*}}{2} \end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs v^+ et v^- sont des vecteurs propres de M, associés respectivement aux valeurs propres ν^+ et ν^-. Le vecteur v^+ a sa première composante strictement positive. On remarque que les composantes des deux vecteurs propres choisis sont constantes.

Soit P la matrice de passage formée par v^+ et v^-. La matrice inverse est

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{D^*}} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{2b^*}{1+\sqrt{D^*}} \\ \dfrac{-2c^*}{1+\sqrt{D^*}} & 1 \end{pmatrix}$$

On note comme précédemment : $\begin{pmatrix} \widetilde{u_1} \\ \widetilde{u_2} \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \widetilde{f} \\ \widetilde{g} \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$.

Par le changement de variable ainsi défini, le système s'écrit :

$$\begin{cases} -\Delta\widetilde{u_1} + (q-\nu^+)\widetilde{u_1} = \lambda\widetilde{u_1} + \widetilde{f} & (1'') \\ -\Delta\widetilde{u_2} + (q-\nu^-)\widetilde{u_2} = \lambda\widetilde{u_2} + \widetilde{g} & (2'') \end{cases}$$

Une fois déterminés $\widetilde{u_1}$ et $\widetilde{u_2}$, les inconnues u_1 et u_2 peuvent être calculées par les relations :

$$u_1 = \frac{1+\sqrt{D^*}}{2}\widetilde{u_1} - b^*\widetilde{u_2} \qquad (3'')$$

$$u_2 = c^*\widetilde{u_1} + \frac{1+\sqrt{D^*}}{2}\widetilde{u_2} \qquad (4'')$$

L'hypothèse (H_{Mv}) entraîne que les fonctions ν^+ et ν^- sont bornées. D'après la remarque du paragraphe donnant l'hypothèse (H_q), l'espace X est le même pour q, $q-\nu^+$ et $q-\nu^-$. De plus, on a $\lambda_1(q-\nu^-) - \lambda_1(q-\nu^+) \geq \sup_x\{\nu^+(x)-\nu^-(x)\}$ Notons $h = \sup_x\{\nu^+(x)-\nu^-(x)\}$.

Si $\lambda < \lambda_1(q-\nu^-)$, l'équation (2") satisfait à la positivité fondamentale (théorème 16). Puisque les fonctions $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$ sont dans X et pour une certaine constante $C_{\widetilde{g}}$, on a

$$|\widetilde{u_2}| \leq \left(\lambda_1(q-\nu^-)-\lambda\right)^{-1} C_{\widetilde{g}}\varphi_1$$

<u>Premier cas</u> Lorsque $\lambda < \lambda_1(q-\nu^+) < \lambda_1(q-\nu^-)$, l'équation (1") vérifie la positivité fondamentale (théorème 16), donc on a

$$\widetilde{u}_1 \geq C(\lambda, \widetilde{f})\varphi_1$$

où $C(\lambda, \widetilde{f})$ tend vers $+\infty$ quand λ tend vers $\lambda_1(q-\nu^+)$ d'après la proposition 9.
De plus, on a

$$|\widetilde{u_2}| \leq \left(\lambda_1(q-\nu^-)-\lambda\right)^{-1} C_{\widetilde{g}}\varphi_1 \leq h^{-1}C_{\widetilde{g}}\varphi_1$$

où $h = \sup_x\{\nu^+(x)-\nu^-(x)\}$
Par conséquent $\widetilde{u_2}$ reste borné, alors que $\widetilde{u}_1$ prend de grandes valeurs quand λ tend vers $\lambda_1(q-\nu^+)$.
Donc il existe un réel strictement positif δ, qui dépend à fois de f, g et M, tel que, pour tout λ de $(\lambda_1(q-\nu^+)-\delta, \lambda_1(q-\nu^+))$, on obtient pour u_1 et u_2, en reprenant les équations $(3'')$ et $(4'')$, $u_1 \geq C_{u_1}\varphi_1$ et $u_2 \geq C_{u_2}\varphi_1$ où C_{u_1} et C_{u_2} sont deux constantes positives.

<u>Second cas</u> Lorsque $\lambda_1(q-\nu^+) < \lambda < \lambda_1(q-\nu^-)$, la relation

$$|\widetilde{u_2}| \leq \left(\lambda_1(q-\nu^-)-\lambda\right)^{-1} C_{\widetilde{g}}\varphi_1$$

reste vérifiée, et l'équation $(1'')$ vérifie le principe de négativité fondamentale (théorème 17). Donc il existe $\delta_{\widetilde{u}_1} \leq h$,strictement positif, tel que pour tout $\lambda \in (\lambda_1(q-\nu^+), \lambda_1(q-\nu^+)+\delta_{\widetilde{u}_1})$, on a :

$$|\widetilde{u_2}| \leq \left(\lambda_1(q-\nu^-)-\lambda\right)^{-1} C_{\widetilde{g}}\varphi_1 \leq (h-\delta_{\widetilde{u_1}})^{-1} C_{\widetilde{g}}\varphi_1$$

et $\widetilde{u_1} \leq -C(\lambda, \widetilde{f})\varphi_1$ avec $C(\lambda, \widetilde{f})$ qui tend vers $+\infty$ lorsque λ tend vers $\lambda_1(q-\nu^+)$.
Par conséquent, $\widetilde{u}_2$ reste bornée, alors que $\widetilde{u}_1$ prend de grandes valeurs négatives, lorsque λ est assez proche de $\lambda_1(q-\nu^+)$.
Donc il existe un réel strictement positif δ, qui dépend à fois de f, g et M, tel que, pour tout λ de $(\lambda_1(q-\nu^+), \lambda_1(q-\nu^+)+\delta)$, on obtient pour u_1 et u_2, dans le cas $c^* > 0$, en reprenant les équations $(3'')$ et $(4'')$, $u_1 \leq -C_{u_1}\varphi_1$ et $u_2 \leq -C_{u_2}\varphi_1$ où C_{u_1} et C_{u_2} sont deux constantes positives.
Dans le cas $c^* < 0$, on obtient $u_1 \leq C_{u_1}\varphi_1$ et $u_2 \geq C_{u_2}\varphi_1$ où C_{u_1} et C_{u_2} sont deux constantes positives.

7.3.2 Seconde forme $a = d$, les fonctions b et c étant proportionnelles entre elles

Puisque $b = \epsilon b^* r(x)$ et $c = \epsilon c^* r(x)$, on obtient $D = 4b^* c^* r^2(x)$, et les deux valeurs propres sont :
$\nu^+(x) = a(x) + \sqrt{b^* c^*} r(x)$, strictement positive
et $\nu^-(x) = a(x) - \sqrt{b^* c^*} r(x) < \nu^+(x)$.
On remarque que $\nu^+(x) - \nu^-(x) = 2\sqrt{b^* c^*} r(x)$, qui est bornée. On note comme précédemment $h = \sup_x \{\nu^+(x) - \nu^-(x)\}$. On a encore $\lambda_1(q - \nu^-) - \lambda_1(q - \nu^+) \geq h$.

Ici, les vecteurs propres : $v^+ = \begin{pmatrix} \sqrt{b^*} \\ \epsilon\sqrt{c^*} \end{pmatrix}$ et $v^- = \begin{pmatrix} -\epsilon\sqrt{b^*} \\ \sqrt{c^*} \end{pmatrix}$ sont associés respectivement aux valeurs propres ν^+ et ν^-. On a toujours pour le vecteur v^+ la première composante strictement positive. Les composantes des deux vecteurs propres choisis sont constantes.

Soit P la matrice de passage formée par v^+ et v^-. La matrice inverse est

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{b^*}} & \dfrac{\epsilon}{2\sqrt{c^*}} \\ \dfrac{-\epsilon}{2\sqrt{b^*}} & \dfrac{1}{2\sqrt{c^*}} \end{pmatrix}$$

On retrouve alors le système

$$\begin{cases} -\Delta\widetilde{u}_1 + (q - \nu^+)\widetilde{u}_1 = \lambda\widetilde{u}_1 + \widetilde{f} & (1'') \\ -\Delta\widetilde{u}_2 + (q - \nu^-)\widetilde{u}_2 = \lambda\widetilde{u}_2 + \widetilde{g} & (2'') \end{cases}$$

en faisant le même changement de variable que précédemment.
La condition $\sqrt{c^*} f + \epsilon\sqrt{b^*} g \geq 0$ assure de la positivité de $\widetilde{f}$. L'étude de la comparaison des solutions à l'état fondamental est la même que dans le cas précédent.$\blacksquare$

Bibliographie

[AB] Alziary, Besbas : *Anti-Maximum principle for a Schrödinger Equation in $\mathbb{R}^N$, with a non radial potential* Rostock Math Kolloq. 59,51-62 (2005)

[Ag] Agmon : *Bounds on Exponentiel Decay of Eigenfunctions of Scrhrödinger Operators,* Schrödinger Operators Como , Springer Verlag (1984)

[ACF] Alziary, Cardoulis, Fleckinger : *Maximum principle and existence of solutions for elliptic systemes involving Schrödinger operators* Rev, Real, Acad. Ciencias Fís. Nat ; (Esp) Madrid 91(1) , 47-52 (1997).

[AFT1] Alziary, Fleckinger, Takáč : *Uniform maximum and anti-maximum principle for a Schrödinger equation in $\mathbb{R}^N$;* J. Differential Equations (1998)

[AFT2] Alziary, Fleckinger, Takáč : *Positivity and negativity of solutions to a Schrödinger equation in $\mathbb{R}^N$* Positivity , 5 , 359-382 (2001)

[AFT3] Alziary, Fleckinger, Takáč : *Maximum and anti-maximum principles for some systems involving Schrödinger operators.*Operator theory : Advances and Applications vol.110 pp. 13-21(1999)

[AT1] Alziary, Takáč : *A pointwise lower bound for positive solutions of a Schrödinger equation in $\mathbb{R}^N$;* J. Differential Equations 133(2) (1997), 280-295

[AT2] Alziary, Takáč : *Compactness for a Schrödinger Operator in the Ground-state Space over $\mathbb{R}^N$;* 2006 International Conference in Honor of Jacqueline Fleckinger ; Electronic Journal of Differential Equations Conference 16, 2007

[Be] Besbas : *Principe d'anti-maximum pour des équations et des systèmes de type Schrödinger dans $\mathbb{R}^N$.* Thèse de doctorat de l'Université des Sciences Sociales Toulouse 1 (2004)

[Bi] Birindelli : *Hopf's Lemma and Anti-Maximum Principle in General Domains ;* Journal of Differential Equations vol 119 $N°$2 July 1,(1995)

[BMS] Birindelli, Mitidieri, Sweers : *Existence of the principal eigenvalue for cooperative elliptic systems in a general domain* Differentsial'nye Uravneniya 35, N3, (1999) (in Russian). (translation in Differential Equations 35, 3 (199), 326-334, or the original english manuscript, 23pp.)

[BNV] Berestycki, Nirenberg, Varadhan : *The Principal Eigenvalue and Maximum Principle for Second Order Elliptic Operators in General Domains.* Communications on Pure an Applied Mathematics p 47-92 (1994)

[CC] Cantrell, Cosner : *On the generalized spectrum for second-order elliptic systems* Transactions of the American Mathematical Society vol. 303, no1, pp. 345-363 (1987)

[C] Cardoulis : *Problèmes elliptiques : applications de la théorie spectrale et étude de systèmes, existences de solutions* Thèse de doctorat de l'Université des Sciences Sociales Toulouse 1 (1997)

[CP] Clément et Pelletier : *An anti-maximum principle for second order elliptic operators;* J. Differential Equations 34, 218-229 (1979)

[CS] Cosner, Schaefer : *Sign-definite solutions in some linear elliptic systems* Roy. Soc. Edimburgh, vol 111. N3-4 p 347-358

[DKM] Daners, Koch, Medina : *Abstract evolution equations, periodic problems and applications,* Longman Research Notes, 279 (1992)

[EE] Edmunds Evans : *Spectral Theory and Differential Operators* Oxford Science Publications, (1987)

[F1] Fleckinger : *Répartition des valeurs propres d'opérateurs de type Schrödinger* Comptes Rendus Acad SC. Paris t 292 série A p 359 (1981)

[F2] Fleckinger : *Estimate of the number of eigenvalues for an operator of Schrödinger type* Proc. Royal Soc. Edimburgh vol. 89 A. N.3-4, p 355-361 (1981).

[FHT] Fleckinger, Hernandez, de Thélin : *Existence of Multiple Principal Eigenvalues for some Indefinite Linear Eigenvalue Problems* Boll U.M.I., (8), 7B, (2004)

[FM] de Figueirido ,Mitidieri : *Maximum principle for linear elliptic systems*Quaterno Matematico 11è, Dip. Sc. Mat., Univ. Trieste. (1988)

[GT] Gilbarg, Trudinger : *Elliptic Parital Differential Equations of Second Order;* Springer-Verlag 1983

[H] Hess : *On the Eigenvalue Problem for Weakly Coupled Elliptic Systems ;* Arch. Ration. Mech Anal 81,151 159(1983)

[HK] Hess, Kato : *On some Linear and Nonlinear eigenvalue problemes with an indefinite weight function,* Comm P.D.E. 5 (1984,993-1032)

[PW] Protter, Weinberger : *Maximum Principles in Differential Equations* Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg (1984)

[M] Miller : *Barriers on cones for uniformly elliptic operators,* Annali di Mat. Pura ed Appl. IV-76(1967)93-106

[RS] Reed Simon : *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol IV : Analysis of Operators* Academic Press, Inc., Boston (1978)

[S] Serre : *les Matrices Théorie et pratique* Dunod (2001)

[SV] Strook, Varadhan : *On degenerate elliptic-parabolic operators of second order and their associated diffusions.* Comm. Pure Appl. Math 25, pp. 651-713 (1972)

RESUME de la THESE

L'objet de cette thèse est l'étude de solutions de certains systèmes d'opérateurs elliptiques, soit sur des domaines bornés, soit sur $\mathbb{R}^N$ tout entier.
Dans la première partie, les solutions respectent la condition de Dirichlet raffinée. Cette condition au bord, définie par Strook et Varadhan, est adaptée aux domaines bornés sans condition de régularité. L'utilisation de plusieurs versions adaptées du théorème de Krein-Rutman permet ici de déterminer le signe des solutions des systèmes.
Dans la seconde partie, les opérateurs sont des opérateurs de Schrödinger. On établit les comparaisons à l'état fondamental pour des solutions de systèmes 2×2, dans le cas de systèmes à coefficients constants, et dans le cas de certains systèmes à coefficients variables.

Mots clés

Systèmes elliptiques, domaines non réguliers, opérateur de Schrödinger, principe du maximum, principe d'anti-maximum, positivité fondamentale, négativité fondamentale.

ABSTRACT

This thesis is devoted to the study of solutions of some elliptic systems, either on bounder non regular domains or on $\mathbb{R}^N$.
In the first part, solutions respect the Refined Dirichlet Condition. This condition, defined by Strook and Varadhan, is adapted to bounded domains, whithout condition of regularity. Some adapted Krein-Rutman's Theorem permit to know the sign of solutions of the system.
In the second part, operators are Schrödinger operators. We study comparison with the fundamental state for 2×2 systems, in the case of systems with constant coefficients, and in the case of some systems with variable coefficients.

Key words

Elliptic systems, non regular domains, Schrödinger operators, maximum principle, anti-maximum principle, fundamental positivity, fundamental negativity.